Lección 2.8: Teorema de Stone. Semigrupos analíticos.

Definición Sea $(H, \langle , \rangle)$ un espacio de Hilbert. Un operador $A : D(A) \subset H \to H$ es simétrico si $\overline{D(A)} = H$ y $A \subset A^*$, es decir, $D(A) \subset D(A^*)$ y $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$ $\forall\, u, v \in D(A)$. El operador es autoadjunto si $A = A^*$. Un operador acotado U en H es unitario si $U^* = U^{-1}$.

Hechos: (A) Todo operador adjunto es cerrado.
(B) U es unitario si y sólo si $R(U) = H$ y U es una isometría.

(Ver Kato, Yosida, Reed-Simon.)

Teorema (Stone)
A es el generador infinitesimal de un C_0-grupo de operadores unitarios, $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, en H de Hilbert si y sólo si iA es un operador autoadjunto.

Demostración: Si A genera C_0-grupo de operadores unitarios entonces $D(A)$ es denso en H y $\forall\, u \in D(A)$

$$-Au = \lim_{t \to 0} t^{-1}(U(-t)u - u)$$

$$= \lim_{t \to 0} t^{-1}(U(t)^* u - u) = A^* u$$

Esto implica que $A = -A^*$ y así $iA = (iA)^*$ y iA es auto-adjunto.

Sea iA auto-adjunto. Por (A), iA es cerrado (A es cerrado) y por el Lema 4 (clase pasada): $D(A)$ es denso en H (reflexivo). Además, $A = -A^*$. Así, $\forall u \in D(A)$:

$$\langle Au, u \rangle = \langle u, A^* u \rangle = -\langle u, Au \rangle = -\overline{\langle Au, u \rangle}$$

Es decir, $\mathrm{Re}\langle Au, u\rangle = 0$, $\forall u \in D(A)$.
(A es disipativo.) También $\mathrm{Re}\langle A^* \ell, \ell \rangle = 0$
$\forall \ell \in D(A^*) = D(A)$ (H Hilbert, x Riesz)
$\therefore$ A^* también es disipativo.

Deducimos que A, A^* son cerrados y dado que $A^{**} = A$, tanto A como $A^* = -A$ son generadores de C_0-semigrupos contractivos en H (por el teo. de Lumer-Phillips).

Si denotamos $\begin{Bmatrix} U_+(t) \\ U_-(t) \end{Bmatrix}$ el semigrupo generado por $\begin{Bmatrix} A \\ A^* \end{Bmatrix}$, definimos

$$U(t) := \begin{cases} U_+(t), & \text{si } t \geq 0 \\ U_-(t), & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Entonces, $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un C_0-grupo y dado que $U(t)^{-1} = U(-t)$, $\|U(t)\| \leq 1$, $\|U(-t)\| \leq 1$, obtenemos $R(U(t)) = H$ y $U(t)$ es una isometría (por (B)). $\square$

2.3 Regularidad de semigrupos. Semigrupos analíticos

Hemos descrito :
- C_0-semigrupos. (SFC)
- semigrupos uniformemente continuos (SUC)

(SUC) $\subset$ (SFC)

$\downarrow$

$\exists$ gran variedad de propiedades de continuidad (Engel, Nagel (2000)).

clase de semigrupos analíticos.

Propiedades de regularidad son útiles para :
- obtener mayor regularidad de las soluciones al problema de Cauchy.
- obtener mejores resultados si perturbamos el generador
- una relación entre el tipo del semigrupo (M,ω) y el espectro del generador.

Definición Un operador $A : D(A) \subset X \to X$ lineal y cerrado, se denomina un operador sectorial (de ángulo δ) si existe $0<\delta<\pi/2$ tal que el sector

$$(1)\dots \quad \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta} := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \setminus \{0\}$$

está contenido en el resolvente de A, $\rho(A)$, y si, además, $\forall\ \varepsilon \in (0,\delta)$ existe $M_\varepsilon \geq 1$

tal que

$$(2)\ \dots \qquad \|R(\lambda,A)\| \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|} \qquad \forall\ \underline{\lambda \neq 0},\ \lambda \in \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta-\varepsilon}$$

Idea: son las condiciones para que la integral de contorno

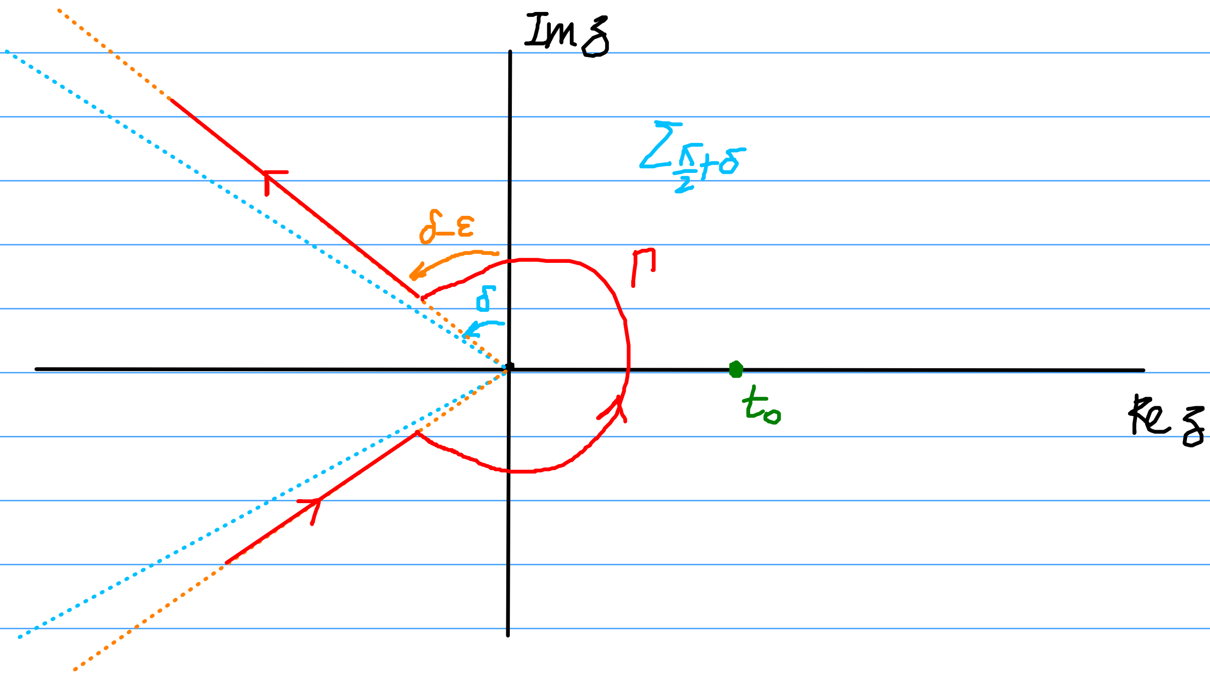
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda,A)\, d\lambda$$

converja, aún en el caso en que A y $\sigma(A)$ no sean acotados.

<u>Definición</u> Sea $A: D(A) \subset X \longrightarrow X$ un operador sectorial y densamente definido (con ángulo $\delta \in (0,\pi/2)$). Definimos:

$$(3)\ \dots \begin{cases} S(0) := Id \\ S(z) := \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma e^{\mu z} R(\mu,A)\, d\mu \end{cases}$$

para $z \in \Sigma_\delta = \{|\arg \lambda| < \delta\} \setminus \{0\}$ y donde Γ es cualquier curva suave por pedazos en $\Sigma_{\delta+\frac{\pi}{2}}$, que conecta $\infty \cdot e^{-i(\pi/2+\delta')}$ con $\infty \cdot e^{+i(\pi/2+\delta')}$ para cualquier $\delta' \in (|\arg z|, \delta)$



Teorema 1

Sea $A : D(A) \subset X \to X$, sectorial, densamente definido. Entonces, $\forall\, \zeta \in \Sigma_\delta$ los operadores $S(\zeta)$ definidos en (3) son operadores lineales acotados en X ($S(\zeta) \in \mathcal{B}(X)$, $\forall\, \zeta \in \Sigma_\delta$) que satisfacen las siguientes propiedades:

(i) $\exists$ $C>0$ uniforme tal que $\|S(\zeta)\| \leq C$ $\forall\, \zeta \in \Sigma_{\delta'}$, si $0<\delta'<\delta$.

(ii) el mapeo $\zeta \mapsto S(\zeta)$ es analítico en $\zeta \in \Sigma_\delta$.

(iii) $S(\zeta_1+\zeta_2) = S(\zeta_1)S(\zeta_2)$ $\forall\, \zeta_1, \zeta_2 \in \Sigma_\delta$

(iv) el mapeo $\zeta \mapsto S(\zeta)$ es fuertemente continuo en $\zeta \in \Sigma_{\delta'} \cup \{0\}$, si $0<\delta'<\delta$.

Dem. Ver Engel-Nagel (2006), Prop. 4.3, pág. 91.

$\square$

Observación Si un operador sectorial genera un C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, éste se puede extender a un sector complejo que incluye $[0,\infty)$: por el teorema 1. Si restringimos $z = t \in [0,\infty)$ entonces $S(t)$ es un semigrupo. Sucede que A es el generador de este semigrupo.

Teorema 2 El generador infinitesimal del C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ definido en (3) cuando $z = t \in [0,\infty)$ es el operador sectorial A original.

Dem. Sea $B: D(B) \subset X \to X$ es el generador infinitesimal del semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Basta con demostrar que

$$R(\lambda, A) = R(\lambda, B)$$

para $\lambda = |\omega_0| + \varepsilon$, donde ω_0 es la cota de crecimiento del semigrupo. Sabemos que el resolvente es la transformada de Laplace del semigrupo:

$$R(\lambda,B)u = (\lambda I - B)^{-1}u$$
$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)u \, dt \qquad \forall u \in X.$$

Sea $t_0 > 0$ arbitrario y escogemos Γ como en la figura.

Por el teorema de Fubini,

$$\int_0^{t_0} e^{-\lambda t} S(t)u \, dt = \int_0^{t_0} e^{-\lambda t} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\mu t} R(\mu,A)u \, d\mu \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{t_0(\mu-\lambda)} - 1}{\mu - \lambda} R(\mu,A)u \, d\mu$$
$$\forall u \in X$$

Por la fórmula integral de Cauchy,

$$\int_\Gamma \frac{R(\mu,A)}{\mu-\lambda} u \, d\mu = -2\pi i \; R(\lambda,A)u$$

Así,

$$R(\lambda,B)u = \lim_{t_0\to\infty} \left[R(\lambda,A)u + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{t_0(\mu-\lambda)}}{\mu-\lambda} R(\mu,A)u \, d\mu \right]$$

Dado que $\operatorname{Re}(\mu-\lambda) \leq -1$ para $\varepsilon = \frac{1}{2}(\delta-\delta')$, $\delta' \in (0,\delta)$, tenemos la estimación,

$$\left\| \int_\Gamma \frac{e^{t_0(\mu-\lambda)}}{\mu-\lambda} R(\mu,A)u \, d\mu \right\| \leq$$

$$\leq e^{-t_0} \|u\| \int_\Gamma \frac{M_\varepsilon}{|\mu-\lambda||\mu|} \, d\mu$$

$$\longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad t_0 \to \infty$$

obtenemos $R(\lambda, A) = R(\lambda, B)$ $\square$

Observación Teoremas 1 y 2 implican que:

A sectorial y densamente definido $\Rightarrow$ A genera un C_0-semigrupo.

Este semigrupo es "extendible" a un sector $\Sigma_\delta \subset \mathbb{C}$. Nótese que para Feller-Miyadera-Phillips uno requiere estimaciones para todas las potencias del resolvente $\|R(\lambda,A)^n\| \leq \frac{M}{|\lambda-\omega|^n}$

si el operador es sectorial sólo requerimos (2).

Definición una familia de operadores $\{S(z)\}_{z \in \Sigma_\delta \cup \{0\}}$ constituye un semigrupo analítico (con ángulo $0 < \delta \leq \pi/2$) si

(i) $S(0) = Id$, $S(z_1+z_2) = S(z_1)S(z_2)$

$\forall z_1, z_2 \in \Sigma_\delta$

(ii) el mapeo $z \mapsto S(z)$ es analítico en $z \in \Sigma_\delta$

(iii) $\lim\limits_{\Sigma_{\delta'} \ni z \to 0} S(z)u = u$, $\forall u \in X$, $\forall\ 0 < \delta' < \delta$

Si además se cumple

(iv) $\| S(z) \|$ es acotado uniformemente en $\Sigma_{\delta'}$, $\forall\ 0<\delta'<\delta$,

entonces es un semigrupo analítico acotado.

Daremos un teorema de equivalencia:

<u>Teorema 3</u> (equivalencia)

Sea $A : D(A) \subset X \to X$, operador lineal en X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) A genera un semigrupo analítico acotado, $\{S(z)\}_{z \in \Sigma_\delta \cup \{0\}}$, en X.

(b) Existe $\theta \in (0, \pi/2)$ tal que los operadores $e^{\pm i\theta} A$ generan C_0-semigrupos en X.

(c) A es el generador de un C_0-semigrupo en X, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, tal que $\mathcal{R}(S(t)) \subset D(A)$ $\forall\, t>0$, y además,

$$(4)\ldots \quad M := \sup_{t>0} \| t\, A S(t) \| < \infty$$

(d) A genera un C_0-semigrupo, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ en X, y existe una constante uniforme $C>0$ tal que

$$(5)\ldots \quad \| R(r+is, A) \| \leq \frac{C}{|s|}$$

$\forall\, r>0$, $\forall\, s\neq 0$, $s\in\mathbb{R}$.

(e) A es densamente definido y sectorial.

Demostración:

(a) $\Rightarrow$ (b): Para $\theta \in [0,\delta)$ definimos

$$S_\theta(t) := S(e^{i\theta}t), \qquad \forall\, t\geq 0$$

como $z = e^{i\theta}t \in \Sigma_\delta \cup \{0\}$ entonces la familia $\{S_\theta(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ es un C_0-semigrupo en X. Llamemos $A_\theta : D(A_\theta) \subset X \longrightarrow X$ a su generador.

Sea $\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{C}$, $\gamma(r) := e^{i\theta} r$.
Por analiticidad y el teorema integral de Cauchy

$$R(1,A)u = \int_0^{\infty} e^{-t} S(t)u \, dt$$

$$= \int_0^{\infty \cdot e^{i\theta}} e^{-r} S(r)u \, dr \quad \left(= \int_\gamma e^{-r} S(r)u \, dr \right)$$

$r \to re^{i\theta}$

$$= e^{i\theta} \int_0^{\infty} e^{-re^{i\theta}} S_\theta(r)u \, dr$$

$$= e^{i\theta} R(e^{i\theta}, A_\theta)u \qquad \forall u \in X$$

Por lo tanto, $A_\theta = e^{i\theta} A$. En efecto,

$$R(1,A)u = e^{i\theta} R(e^{i\theta}, A_\theta)u$$

$$\Rightarrow \quad u = R(1,A)(I-A)u$$

$$= e^{i\theta} R(e^{i\theta}, A_\theta)(I-A)u$$

$$\Rightarrow \quad e^{-i\theta}(e^{i\theta} I - A_\theta)u = (I-A)u$$

$$\Rightarrow \quad (I - e^{-i\theta} A_\theta)u = (I-A)u$$

$$\therefore \quad A_\theta = e^{i\theta} A$$

Análogamente $\{S(e^{-i\theta}t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo con generador $e^{-i\theta}A$.
Esto prueba (b).

(b) $\Rightarrow$ (d): Sea $e^{-i\theta} = a - ib$ con $a, b > 0$ (ya que $\theta \in (0, \pi/2)$). Por el teorema de FMP, el generador $e^{-i\theta}A$ satisface

$$\| R(r+is, A) \| = \| e^{-i\theta} R(e^{-i\theta}(r+is), e^{-i\theta}A) \|$$

$$\leq \frac{\bar{C}}{ar+bs} \leq \frac{C}{s}$$

$\forall r, s > 0$, $C = \bar{C}/b$.

Para $s < 0$ la estimación es análoga tomando el generador $e^{i\theta}A$. Esto prueba (d).