Lección 2.3: El operador resolvente.

Dado un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ se define su generador infinitesimal $A : D(A) \subset X \to X$.
Se probó: $A \in \mathscr{C}(X)$, $\overline{D(A)} = X$.

<u>Definición</u> Un subespacio lineal, $N \subset D(A)$, del dominio de un operador lineal, $A : D(A) \subset X \to X$, se denomina un <u>núcleo para A</u> si N es denso en $D(A)$ en la norma de la gráfica:

$$\|u\|_A := \|u\| + \|Au\|, \qquad u \in D(A)$$

<u>Proposición</u> Sea $A : D(A) \subset X \to X$ el generador de un C_0-semigrupo, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Un subespacio lineal, $N \subset D(A)$, del dominio de A que sea $\|\cdot\|$-denso en X e invariante bajo el semigrupo ($S(t)u \in N$ $\forall\, u \in N$) es siempre un núcleo para A.

<u>Dem.</u> Ver Proposición 1.7, Engel-Nagel (2000). $\square$

Vamos a definir las potencias de $A : D(A) \subset X \to X$ mediante:

$$n = 0 : \quad \begin{cases} A^0 := Id \\ D(A^0) := X \end{cases}$$

$$n = 1 : \quad \begin{cases} A^1 := A \\ D(A^1) := D(A) \end{cases}$$

$$n \geq 2 : \begin{cases} A^n := A A^{n-1} \\ D(A^n) := \{ u \in D(A^{n-1}) ; \ A^{n-1} u \in D(A) \} \end{cases}$$

Teorema Sea $A : D(A) \subset X \to X$ el generador de un C_0-semigrupo, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Entonces

$$D(A^\infty) := \bigcap_{\substack{n \geq 0 \\ n \in \mathbb{Z}}} D(A^n)$$

es denso en X.

Demostración: Observamos que $\forall n \geq 0$, $D(A^n)$ es un subespacio lineal de X. Por lo tanto, $D(A^\infty)$ es un subespacio lineal. Sea $\varphi \in C((-\infty, \infty))$ con $\varphi \geq 0$, $\operatorname{supp} \varphi \subset (0, \infty)$ compacto. Entonces $\forall u \in X$ definimos

$$u_\varphi := \int_0^\infty \varphi(t) S(t) u \, dt \quad \in X .$$

observamos que

$$h^{-1}(S(h) - Id) u_\varphi = h^{-1} \left[S(h) \int_0^\infty \varphi(t) S(t) u \, dt - \int_0^\infty \varphi(t) S(t) u \, dt \right]$$

$$= h^{-1} \left[\int_0^\infty \varphi(t) \left(S(t+h) - S(t) \right) u \, dt \right]$$

$$= h^{-1} \left[\int_h^\infty \left(\varphi(\tau - h) - \varphi(\tau) \right) S(\tau) u \, d\tau - \int_0^h \varphi(\tau) S(\tau) u \, d\tau \right]$$

Así,

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{S(h)-Id}{h}\right)u_\varphi = \lim_{h\to 0}\int_0^\infty h^{-1}\left(\varphi(\tau-h)-\varphi(\tau)\right)S(\tau)u$$

$$= \int_0^\infty \lim_{h\to 0} h^{-1}\left(\varphi(\tau-h)-\varphi(\tau)\right)S(\tau)u\,d\tau$$

ya que $\varphi(\xi)=0 \quad \forall\ \xi\in(-\infty,a)$, $a>0$, $\operatorname{supp}\varphi\subset(a,b)$, y por conv. uniforme de la integral.

Por lo tanto concluimos $u_\varphi\in D(A)$ y

$$Au_\varphi = -\int_0^\infty \varphi'(\tau)S(\tau)u\,d\tau$$

Argumentando por inducción sobre $n\geq 1$ (ejercicio) se puede verificar que $u_\varphi\in D(A^n)$ $\forall\ n\geq 1$ y además $A^n u_\varphi = (-1)^n u_{\varphi^{(n)}}$ donde $\varphi^{(n)}(\cdot) = \dfrac{d^n\varphi}{dt^n}$. Por lo tanto,

$$u_\varphi \in \bigcap_{n\geq 0} D(A^n)$$

Sea φ una función de prueba como la anterior que además

$$\int_0^\infty \varphi(t)\,dt = 1$$

Sea $\epsilon>0$ y definimos $\varphi_\epsilon:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ mediante

$$\varphi_\epsilon(t) := \frac{1}{\epsilon}\varphi\left(\frac{t}{\epsilon}\right).$$

Claramente, $\varphi_\epsilon \in C^\infty$, $\varphi_\epsilon(t) = 0$ si $t \notin [\epsilon a, \epsilon b]$ (donde $\operatorname{supp} \varphi \subset [a,b]$) y $\int_0^\infty \varphi_\epsilon(t)\, dt = 1$.

Entonces para cada $u \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned}\|u_{\varphi_\epsilon} - u\| &= \left\| \frac{1}{\epsilon} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\tau}{\epsilon}\right) (S(\tau)u - u)\, d\tau \right\| \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} \int_{\epsilon a}^{\epsilon b} \varphi\left(\frac{\tau}{\epsilon}\right) \|S(\tau)u - u\|\, d\tau \\ &\leq \sup_{\tau \in [\epsilon a, \epsilon b]} \|S(\tau)u - u\| \longrightarrow 0 \text{ si } \epsilon \to 0^+.\end{aligned}$$

Esto implica que $\lim_{\epsilon \to 0} u_{\varphi_\epsilon} = u$

Es decir, $u \in \overline{\bigcap_{n \geq 0} D(A^n)}$ $\square$

Lema (desigualdad de Landau-Kolmogorov)
Sea $A : D(A) \subset X \to X$ el generador de un C_0-semigrupo acotado $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ (es decir, $\|S(t)\| \leq M$ $\forall t \geq 0$, con $M \geq 1$ constante). Si $u \in D(A^2)$ entonces

$$\|Au\|^2 \leq 4M^2 \|A^2 u\| \|u\| \quad \cdots (1)$$

Demostración: Por propiedades del generador:

- $\frac{d}{dt}(S(t)u) = AS(t)u = S(t)Au$, $\forall u \in D(A)$
- $S(t)u - u = \int_0^t AS(\tau)u\, d\tau = \int_0^t S(\tau)Au\, d\tau$ $\forall u \in D(A)$.

Si $u \in D(A^2)$ entonces $Au \in D(A)$ y por lo tanto

$$\int_0^t S(\tau) A^2 u \, d\tau = \int_0^t A S(\tau) A u \, d\tau$$
$$= A \int_0^t S(\tau) A u \, d\tau$$

Así, si $u \in D(A^2)$ tenemos que

$$\frac{d}{dt}\left(S(t) u \right) = A S(t) u$$
$$= A\left[u + \int_0^t S(\tau) A u \, d\tau \right]$$
$$= Au + \int_0^t S(\tau) A^2 u \, d\tau +$$
$$+ t S(t) A^2 u - t S(t) A^2 u$$
$$= \frac{d}{dt}\left[t A u + t \int_0^t S(\tau) A^2 u \, d\tau - \int_0^t \tau S(\tau) A^2 u \, d\tau \right]$$

Integrando :

$$S(t) u - u = t A u + \int_0^t (t-\tau) S(\tau) A^2 u \, d\tau \quad \cdots (2)$$

$\forall u \in D(A^2)$

Así, $$Au = t^{-1}\left(S(t) u - u - \int_0^t (t-\tau) S(\tau) A^2 u \, d\tau \right)$$

y estimamos :

$$\|Au\| \leq t^{-1}\left(\|S(t)u\| + \|u\|\right) +$$
$$+ t^{-1}\int_0^t (t-\tau)\,\|S(\tau)A^2u\|\,d\tau$$
$$\leq \frac{2M}{t}\|u\| + \frac{Mt}{2}\|A^2u\|$$
ya que $M \geq 1$ y $\|S(0)\| = 1$.

Si $A^2u=0$ entonces $\|Au\| \leq \frac{2M}{t}\|u\| \quad \forall t \geq 0$

Tomando lim cuando $t \to \infty$ tenemos que $Au=0$ y (1) se satisface trivialmente.

Si $A^2u \neq 0$ tomamos $t = \frac{2\|u\|^{1/2}}{\|A^2u\|^{1/2}}$

y obtenemos (1) $\square$

El operador resolvente

Definición (resolvente y espectro)
Sea $A \in \mathcal{C}(X,Y)$, un operador lineal, cerrado, densamente definido, X, Y espacios de Banach, $A: D(A) \subset X \to Y$, $\overline{D(A)} = X$.
Su resolvente, $\rho(A) \subset \mathbb{C}$, es el conjunto de números complejos, $\lambda \in \mathbb{C}$, tales que $A-\lambda$ es inyectivo y suprayectivo, y $(A-\lambda)^{-1}$ es un operador acotado, $(A-\lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X)$.
El espectro de A se define como
$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Definición (partición de Weyl)
Sea $A \in \mathcal{C}[X,Y]$, densamente definido. Se definen el espectro puntual, $\sigma_{pt}(A)$, y el espectro esencial, $\sigma_{ess}(A)$, como:

$$\sigma_{pt}(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} : A-\lambda \text{ es de Fredholm con índice igual a cero y núcleo no trivial} \}$$

y $$\sigma_{ess}(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} : A-\lambda \text{ no es de Fredholm, o bien, es de Fredholm con índice } \neq 0 \}$$

Observación: $A \in \mathcal{C}(X,Y)$ es de Fredholm si su rango, $R(A) \subset Y$, es cerrado y tanto su nulidad, $\text{nul}\, A := \dim \operatorname{Ker} A$, como su deficiencia, $\text{def}\, A := \operatorname{codim} R(A)$, son ambos son finitos. Se dice que A es semi-Fredholm si $R(A)$ es cerrado y alguno de $\text{def}\, A$ ó $\text{nul}\, A$ es finito. En ambos casos se define

$$\text{ind}\, A := \text{nul}\, A - \text{def}\, A$$

(índice de Fredholm)

Observación: Claramente $\sigma_{pt}(A) \subset \sigma(A)$, $\sigma_{ess}(A) \subset \sigma(A)$. Además, como A es cerrado entonces

$$\sigma(A) = \sigma_{pt}(A) \cup \sigma_{ess}(A)$$

Podría suceder que para $\lambda \in \mathbb{C}$, $A-\lambda$ invertible pero $(A-\lambda)^{-1} \notin \mathcal{B}(\mathbb{Y},\mathbb{X})$. Esto no ocurre si A es cerrado: se puede probar que $A \in \mathcal{C}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, $\mathcal{R}(A) = \mathbb{Y}$ con A invertible $\Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{Y},\mathbb{X})$ (ver Kato, pg. 167).

Bajo esta definición:
- $\sigma_{ess}(A)$ es fácil de calcular
- $\sigma_{pt}(A)$ contiene a un conjunto discreto de "valores propios" aislados con multiplicidad finita.

<u>Definición</u> (operador resolvente)
Sea $A \in \mathcal{C}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ densamente definido. Para cada $\lambda \in \rho(A)$, el operador resolvente se define como

$$R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{Y},\mathbb{X})$$

<u>Lema</u> (reescalamiento)
Sea $A : D(A) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ el generador de un C_0-semigrupo en $\mathbb{X}$ de Banach (real o complejo). Entonces, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, la familia de operadores

$$\{\tilde{S}(t)\}_{t \geq 0} := \{e^{-\lambda t} S(t)\}_{t \geq 0}$$

constituye un C_0-semigrupo en $\mathbb{X}$ (real o complejo) con generador $\tilde{A} := A - \lambda$, $D(\tilde{A}) = D(A)$.

Demostración: Para cada $t \geq 0$ fijo

$$\|\tilde{S}(t)\| \leq e^{-(\mathrm{Re}\lambda)t}\|S(t)\|$$

$\therefore$ $\{\tilde{S}(t)\}$ es una familia en $\mathcal{B}(X)$.
Claramente $\tilde{S}(0) = Id$ $\quad \tilde{S}(t+s) =$
$$e^{-\lambda(t+s)}S(t+s) = e^{-\lambda t}S(t)\, e^{-\lambda s}S(s)$$
$$= \tilde{S}(t)\,\tilde{S}(s)$$

$\therefore$ se satisfacen $(S_1), (S_2)$. Además,

$$\lim_{t\to 0^+} \tilde{S}(t)u = \lim_{t\to 0^+} e^{-\lambda t}S(t)u = u \quad \forall u \in X$$

$\Rightarrow$ $\{\tilde{S}(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo en X.

Dado que

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{S}(t)u\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}S(t)u\right)$$
$$= -\lambda e^{-\lambda t}S(t)u + e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}(S(t)u)$$
$$= -\lambda e^{-\lambda t}S(t)u + e^{-\lambda t}AS(t)u \quad \forall u \in X$$

$$\Rightarrow \tilde{A}u = (A-\lambda)u = \left(e^{-\lambda t}AS(t)u - \lambda e^{-\lambda t}S(t)u\right)\Big|_{t=0}$$
$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{\tilde{S}(t)u - u}{t}$$

concluimos que $\tilde{A} = A - \lambda$ es el generador de $\{\tilde{S}(t)\} = \{e^{-\lambda t}S(t)\}$ $\square$

Lema (identidades)
Sea $A : D(A) \subset X \to X$ el generador de un C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Entonces para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y $t > 0$, tenemos:

$$(3)\ldots \qquad e^{-\lambda t} S(t)u - u = (A-\lambda)\int_0^t e^{-\lambda\tau} S(\tau)u \, d\tau \qquad \forall u \in X$$

$$(4)\ldots \qquad = \int_0^t e^{-\lambda\tau} S(\tau)(A-\lambda)u \, d\tau \qquad \text{si } u \in D(A)$$

Demostración: Se deduce directamente de

$$S(t)u - u = A\int_0^t S(\tau)u \, d\tau \qquad \forall u \in X$$

$$= \int_0^t S(\tau)Au \, d\tau \qquad \text{si } u \in D(A)$$

aplicado al semigrupo reescalado $e^{-\lambda t}S(t) = \tilde{S}(t)$ con generador $A - \lambda$

$\square$

Teorema (representación integral del resolvente)
Sea $A : D(A) \subset X \to X$ el generador de un C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de tipo (M, ω) con $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$. Entonces:

(a) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que

$$R(\lambda)u = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} S(\tau)u \, d\tau \qquad \ldots (5)$$

$$:= \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda\tau} S(\tau)u \, d\tau$$

existe $\forall u \in X$. Entonces:

$\lambda \in \rho(A)$ y además $R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1} =$
$R(\lambda, A) \in \mathcal{B}(X)$

(b) Si $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ entonces $\lambda \in \rho(A)$ y el operador resolvente está determinado por la fórmula en (a).

(c) $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ se tiene:

$$\| R(\lambda, A) \| = \| (\lambda - A)^{-1} \| \leq \frac{M}{\mathrm{Re}\,\lambda - \omega} \quad \ldots (6)$$

Nota: para $\lambda \in \rho(A)$ la fórmula

$$R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} S(\tau)\, d\tau \quad \ldots (7)$$

es la representación integral del resolvente.

<u>Demostración</u>: (a) Sin pérdida de generalidad por el lema de reescalamiento podemos suponer que $\lambda = 0$. Así, nuestra hipótesis es que

$$\int_0^\infty S(\tau) u \, d\tau = \lim_{t \to \infty} \int_0^t S(\tau) u \, d\tau =: R(0) u$$

existe para todo $u \in X$.

Sean $u \in X$, $h > 0$ arbitrarios. Calculamos
$h^{-1}(S(h) - Id)\, R(0) u = h^{-1}(S(h) - Id) \int_0^\infty S(\tau) u \, d\tau$

Para cada $t>0$,

$$h^{-1}(S(h)-Id)\int_0^t S(\tau)u\,d\tau =$$

$$= h^{-1}\int_0^t S(\tau+h)u\,d\tau - h^{-1}\int_0^t S(\tau)u\,d\tau$$

$$= h^{-1}\int_h^{t+h} S(\xi)u\,d\xi - h^{-1}\int_0^h S(\tau)u\,d\tau - h^{-1}\int_h^t S(\tau)u\,d\tau$$

$$= \underbrace{h^{-1}\int_t^{t+h} S(\tau)u\,d\tau}_{\substack{\to 0 \text{ si } t\to\infty,\ \forall h>0 \text{ fijo} \\ \text{ya que } \int_0^\infty S(\tau)u\,d\tau \text{ existe}}} - h^{-1}\int_0^h S(\tau)u\,d\tau$$

Por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0^+} h^{-1}(S(h)-Id)R(0)u = \lim_{h\to 0^+} -h^{-1}\int_0^h S(\tau)u\,d\tau = -u \quad \forall u\in X$$

Esto implica que $R(0)u\in D(A)$, $\forall u\in X$ y

$AR(0)u=-u \quad \forall u\in X$. Es decir,

$$\mathcal{R}(R(0))\subset D(A), \qquad AR(0)=-Id.$$

Por otro lado, $\forall u\in D(A)$ se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} A\int_0^t S(\tau)u\,d\tau = \lim_{t\to\infty}\int_0^t S(\tau)Au\,d\tau$$

$$= R(0)Au$$

donde hemos usado que A es cerrado.
Por ende,

$$R(0)Au \underset{\substack{\forall u\in D(A)\\ \text{denso en } X}}{=} A\,R(0)u \underset{\forall u\in X}{=} -u$$

es decir, $R(0) = (-A)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$.

En particular, $0\in\rho(A)$.

(b) Sabemos que $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$ $\forall t\geq 0$. Entonces para cada $\lambda\in\mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\lambda>\omega$ tenemos la estimación

$$\left\|\int_0^t e^{-\lambda\tau}S(\tau)u\,d\tau\right\| \leq M\int_0^t e^{(\omega-\operatorname{Re}\lambda)\tau}\,d\tau$$

$$= \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)}\left(1-e^{-(\operatorname{Re}\lambda-\omega)t}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda-\omega} \quad \text{si } t\to\infty \text{ ya que } \operatorname{Re}\lambda>\omega.$$

Así, $\forall\lambda\in\mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\lambda>\omega$ es tal que $R(\lambda)$ existe como operador y $\lambda\in\rho(A)$ (por (a)).

Por lo tanto

$$\begin{cases} R(\lambda)u = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} S(\tau)u \, d\tau & \forall u \in X \\ \qquad\;\; = (\lambda - A)^{-1} u \\ \text{y} \quad \lambda \in \rho(A) \end{cases}$$

siempre que $\operatorname{Re}\lambda > \omega$.

(c) Se deduce de (b) y de la estimación anterior:

$$\| R(\lambda, A) \| = \| (\lambda - A)^{-1} \| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}$$

$\square$

<u>Corolario 1</u> Sea $A : D(A) \subset X \to X$, generador de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, C_0-semigrupo de tipo (M, ω), $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$. Entonces, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos:

(7) --- $$R(\lambda, A)^n u = (\lambda - A)^{-n} u$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} \left(R(\lambda, A) u \right)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty \tau^{n-1} e^{-\lambda\tau} S(\tau) u \, d\tau$$

$\forall u \in X$.

En particular,

$$\| R(\lambda,A)^n \| = \| (\lambda - A)^{-n} \|$$

(8) .... $$\leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, \mathrm{Re}\lambda > \omega.$$

Demostración: La primera igualdad en (7) es consecuencia de un teorema general (ver Kato, cap. III):

$\rho(A)$ es abierto en $\mathbb{C}$ y $\forall \mu \in \rho(A)$

$$R(\lambda,A) = (\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu,A)^{n+1}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\mu - \lambda| \leq \dfrac{1}{\|R(\mu,A)\|}$

Esto implica $\dfrac{d^n}{d\lambda^n}(R(\lambda,A))$

$$= (-1)^n n!\, R(\lambda,A)^{n+1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Para verificar la segunda parte de (7): notamos que gracias a (6) la integral converge uniformemente $\forall \lambda \in \rho(A)$ (en particular $\forall \lambda$, con $\mathrm{Re}\lambda > \omega$). Por lo tanto,

$$\frac{d}{d\lambda}(R(\lambda,A)u) = \frac{d}{d\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} S(\tau)u\, d\tau$$

$$= -\int_0^\infty \tau e^{-\lambda\tau} S(\tau)u\, d\tau$$

$\forall u \in X, \ \forall \operatorname{Re}\lambda > \omega$. Fórmula para $n=2$.

La fórmula general para $n \geq 3$ se prueba por inducción (ejercicio).

Finalmente, (8) se deduce de:

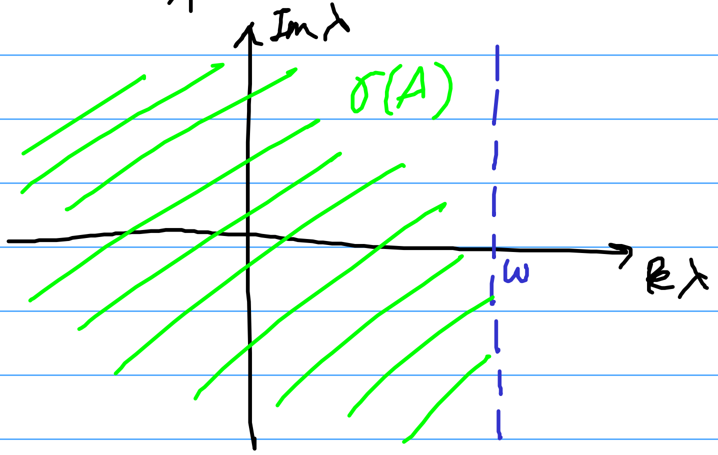
$$\| R(\lambda,A)^n u \| = \frac{1}{(n-1)!} \left\| \int_0^\infty \tau^{n-1} e^{-\lambda\tau} S(\tau) u \, d\tau \right\|$$

$$\leq \frac{M}{(n-1)!} \int_0^\infty \tau^{n-1} e^{(\omega - \operatorname{Re}\lambda)\tau} d\tau \cdot \|u\|$$

$$= \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n} \|u\| \qquad \forall u \in X$$

$\square$

Nota: la propiedad (b) del teorema implica que $\sigma(A) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq \omega \}$



<u>Definición</u> Para cualquier $A \in \mathcal{C}(X, Y)$ densamente definido se define la <u>cota espectral</u> como

$$s(A) := \sup \{ \operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A) \}$$

Claramente, $\forall \lambda \in \sigma(A)$, $\operatorname{Re}\lambda \leq \omega$. Tomando el sup $s(A) \leq \omega$. Tomando inf en ω:

Corolario 2. Para un C_0-semigrupo con generador A:

$$-\infty \leq s(A) \leq \omega_0 < \infty$$