Lección 2.19: Sistemas de evolución, caso hiperbólico.

1).- $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$, $\forall\, t\in[0,T]$ $A(t)$ es el generador de un C_0-semigrupo.

"Hiperbolicidad":

(H_1) $\{A(t)\}$ es estable. $(M\geq 1, \omega\in\mathbb{R})$

$Y \hookrightarrow X$ $\quad \|u\|_X \leq C\|u\|_Y$

(H_2) $Y\subset X$ (Y denso, $A(t)$-invariante)
El espacio Y es $A(t)$-admisible $\forall\, t\in[0,T]$. $\{\tilde{A}(t)\}_{t\in[0,T]}$ familia de restricciones, $\tilde{A}(t) := A(t)|_Y$
es una familia estable $(\tilde{M}\geq 1, \tilde{\omega}\in\mathbb{R})$

(H_3) $\forall\, t\in[0,T]$ fijo, $Y\subset D(A(t))$,
$A(t)$ es acotado de Y en X.
$t\mapsto A(t)$ es continuo en $(\mathcal{B}(Y,X), \|\cdot\|_{Y\to X})$

Teorema 1 Supongamos $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ "hiperbólica" ($(H_1)-(H_3)$ se cumplen). Entonces existe un sistema único de evolución, $U(t,s)$, $0\leq s\leq t\leq T$, en X, que satisface:

(E_1): $\quad \|U(t,s)\| \leq M\exp(\omega(t-s))$ $\quad \forall\ 0\leq s\leq t\leq T.$

(E_2): $\quad \left(\dfrac{\partial^+ U(t,s)v}{\partial t}\right)\Big|_{t=s} = A(s)v \quad \forall\, v\in Y,\ 0\leq s\leq T$

derivada x la derecha.

$$(E_3): \quad \frac{\partial U(t,s)v}{\partial s} = -U(t,s)A(s)v \qquad \begin{matrix} \forall v \in Y \\ 0 \leq s \leq t \leq T \end{matrix}$$

Demostración: Se aproxima la familia por familias constantes por pedazos:

Sea $t_k^n := \left(\frac{k}{n}\right)T, \qquad k = 0, 1, \dots, n$

$$(2) \cdots \begin{cases} A_n(t) = A(t_k^n), & t_k^n \leq t \leq t_{k+1}^n \\ & 0 \leq k \leq n-1 \\ A_n(T) = A(T) \end{cases}$$

Como $t \mapsto A(t)$ es continuo en la norma de $\mathcal{B}(Y, X)$ entonces es fácil verificar que

$$\| A(t) - A_n(t) \|_{Y \to X} \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty$$

uniformemente en $t \in [0, T]$.

De la definición de $A_n(t)$ y las hipótesis (H_j) tenemos que: $\forall\, n \geq 1$ $\{A_n(t)\}_{t \in [0,T]}$ es una familia estable con las mismas constantes de estabilidad $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$.

$$\tilde{A}_n(t) := A_n(t)|_Y$$

$\{\tilde{A}_n(t)\}_{t \in [0,T]}$ también es estable con las mismas constantes de estabilidad $\tilde{M} \geq 1$, $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}$ ($\forall\, n \geq 1$ fijo).

Definimos una familia biparamétrica de operadores $U_n(t,s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$, $n \in \mathbb{N}$, mediante:

$$
(3) \cdots \quad U_n(t,s) := \begin{cases} S_{t_j^n}(t-s), & t_j^n \leq s \leq t \leq t_{j+1}^n \\ S_{t_k^n}(t-t_k^n)\left[\prod\limits_{j=\ell+1}^{k-1} S_{t_\ell^n}\left(\frac{T}{n}\right)\right] S_{t_\ell^n}(t_{\ell+1}^n - s) & \\ \text{para} \quad k > \ell, \quad t_k^n \leq t \leq t_{k+1}^n & \\ \qquad\qquad\qquad t_\ell^n \leq s \leq t_{\ell+1}^n & \end{cases}
$$

Se puede verificar (ejercicio) que:

- $U_n(s,s) = I, \qquad \forall \; 0 \leq s \leq T$
- $U_n(t,s) = U_n(t,\xi)\, U_n(\xi,s), \quad \forall \; 0 \leq s \leq \xi \leq t \leq T$
- $(t,s) \longmapsto U_n(t,s)$ es fuertemente continuo en $0 \leq s \leq t \leq T$

Es decir, $U_n(t,s)$ es un sistema de evolución.

Por el teorema 3 (clase pasada):

$$
(4) \cdots \qquad \|U_n(t,s)\| \leq M \exp(\omega(t-s)) \qquad \forall \; 0 \leq s \leq t \leq T
$$

De la propiedad (H_2) de hiperbolicidad tenemos que $U_n(t,s)\, Y \subset Y \quad \forall \; 0 \leq s \leq t \leq T$

Dado que $Y \subset D(A(t))$ $\forall$ $t \in [0,T]$, de la definición de $U_n(t,s)$ deducimos que: para todo $v \in Y$

$$\frac{\partial U_n}{\partial t}(t,s)v = A_n(t)U_n(t,s)v \qquad \text{para } t \neq t_j^n,\ j = 0,1,\dots,n$$

$$\frac{\partial U_n}{\partial s}(t,s)v = -U_n(t,s)A_n(s)v \qquad \text{para } s \neq t_j^n,\ j = 0,1,\dots,n$$

Aplicando nuevamente el teorema 3 (clase pasada) y por (H_3):

$$\|U_n(t,s)\|_{Y\to Y} \leq \tilde{M}\exp(\tilde{\omega}(t-s)) \quad \forall\ 0 \leq s \leq t \leq T$$

Sea $v \in Y$, consideremos el mapeo

$$\xi \mapsto U_n(t,\xi)U_m(\xi,s)v \qquad \xi \in (s,t)$$

con $0 \leq s \leq \xi \leq t \leq T$, $n,m \in \mathbb{N}$. Sabemos que este mapeo es diferenciable, excepto en un conjunto finito de valores, $\xi \neq \{t_j^m, t_i^n\}_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq m}}$

Además,

$$U_n(t,s)v - U_m(t,s)v = -\int_s^t \frac{\partial}{\partial\xi}\left(U_n(t,\xi)U_m(\xi,s)v\right)d\xi$$

$$= \int_s^t U_n(t,\xi)\left(A_n(\xi) - A_m(\xi)\right)U_m(\xi,s)\,v\ d\xi$$

Denotamos $\bar{\omega} := \max\{\omega, \tilde{\omega}\}$. Por lo tanto

$$\| U_n(t,s)v - U_m(t,s)v \| \leq M\tilde{M} \exp(\bar{\omega}(t-s)) \|v\|_Y \times$$
$$\times \int_s^t \| A_n(\xi) - A_m(\xi) \|_{Y \to X} \, d\xi$$

Como $\| A_n(t) - A(t) \|_{Y \to X} \to 0$ si $n \to \infty$, unif. en $t \in [0,T]$, deducimos que $U_n(t,s)v$ es convergente en X (es de Cauchy), uniformemente en $0 \leq s \leq t \leq T$ cuando $n \to \infty$, $\forall v \in Y$.

Como Y es denso en X concluimos que

$U_n(t,s)v$ converge fuertemente en X, $\forall v \in X$, cuando $n \to \infty$ y uniformemente en $0 \leq s \leq t \leq T$.

Así, podemos definir:

$$(5) \cdots \quad U(t,s)u := \lim_{n \to \infty} U_n(t,s)u \qquad \forall u \in X, \; 0 \leq s \leq t \leq T.$$

De las propiedades de evolución de $U_n(t,s)$ se deducen las propiedades de evolución para $U(t,s)$. De la estimación (4) deducimos (E_1).

Para demostrar (E_2) y (E_3) consideremos el mapeo:

$$\xi \mapsto U_n(t,\xi)S_\tau(\xi-s)v$$

con $v \in \mathbb{X}$, para cierto $0 \leq s \leq \tau \leq t \leq T$.
$0 \leq s \leq \xi \leq t \leq T$

Esta función es diferenciable excepto en un conjunto finito de valores de $\xi \in \{t_j^n\}$.
Además,

$$U_n(t,s)v - S_\tau(t-s)v = -\int_s^t \frac{\partial}{\partial\xi}\left[U_n(t,\xi)S_\tau(\xi-s)v\right]d\xi$$
$$= \int_s^t U_n(t,\xi)\left(A_n(\xi) - A(\tau)\right)S_\tau(\xi-s)v\, d\xi$$

Así,

$$\|U_n(t,s)v - S_\tau(t-s)v\| \leq M\tilde{M}\exp(\bar{\omega}(t-s))\|v\|_{\mathbb{X}} \times$$
$$\times \int_s^t \|A_n(\xi) - A(\tau)\|_{\mathbb{X}\to\mathbb{X}}\, d\xi$$

Tomando el límite cuando $n\to\infty$ obtenemos

$$(6)\cdots \quad \|U(t,s)v - S_\tau(t-s)v\| \leq M\tilde{M}\exp(\bar{\omega}(t-s))\|v\|_{\mathbb{X}} \times$$
$$\times \int_s^t \|A(\xi)-A(\tau)\|_{\mathbb{X}\to\mathbb{X}}\, d\xi$$

Ahora, escogemos $\tau = s$. Dividiendo entre $t-s>0$ y tomando el límite cuando $t\to s^+$ obtenemos:

$$\limsup_{t\to s^+} (t-s)^{-1} \| U(t,s)v - S_s(t-s)v \| = 0$$

ya que $t \mapsto A(t)$ es continuo en $(\mathcal{B}(Y,X), \|\cdot\|_{Y\to X})$. Como $S_s(t-s)v$ es diferenciable por la derecha en $t=s$, obtenemos que también $U(t,s)v$ es diferenciable por la derecha y sus derivadas coinciden

$$\left(\frac{\partial^+ U(t,s)v}{\partial t}\right)_{|t=s} = A(s)v \qquad \forall v \in Y$$

Esto prueba (E_2).

Ahora, tomamos $\tau = t$ en (6). Dividiendo entre $t-s>0$ y tomando el límite cuando $s \to t^-$ obtenemos

$$\limsup_{t\to s^-} (t-s)^{-1} \| U(t,s)v - S_t(t-s)v \| = 0.$$

Por los mismos argumentos,

$$\left(\frac{\partial^- U(t,s)v}{\partial s}\right)_{|s=t} = -A(t)v \qquad \forall v \in Y$$

Para $s<t$, la propiedad (E_2) y la continuidad fuerte de $U(t,s)$ en X implican que:

$$\frac{\partial^+ U(t,s)v}{\partial s} = \lim_{h\to 0^+} h^{-1}\left[U(t,s+h)v - U(t,s)v\right]$$

$$= \lim_{h\to 0^+} U(t,s+h)\, h^{-1}\left[v - U(s+h,s)v\right]$$

$$= -\,U(t,s)A(s)v \qquad \cdots \quad (7)$$

Para $s\le t$ tenemos (dado que $\left(\partial^- U(t,s)v/\partial s\right)_{|t=s} = -A(t)v$) :

$$\frac{\partial^- U(t,s)v}{\partial s} = \lim_{h\to 0^+} h^{-1}\left[U(t,s)v - U(t,s-h)v\right]$$

$$= U(t,s)\lim_{h\to 0^+} h^{-1}\left[v - U(s,s-h)v\right]$$

$$= -\,U(t,s)A(s)v \qquad \cdots \quad (8)$$

De (7) y (8) : $\dfrac{\partial U}{\partial s}(t,s)v = -U(t,s)A(s)v$

$\forall v\in Y \quad \Rightarrow \quad (E_3)$.

Finalmente, para verificar la unicidad supongamos que

$\Theta(t,s)$ es un sistema de evolución que satisface (E_j), $j=1,2,3$.

Para todo $v\in Y$, sea la función :

$$\xi \mapsto Ⓗ(t,\xi)\, U_n(\xi,s)\, v \quad , \qquad n \in \mathbb{N}$$

Como Ⓗ satisface (E_s) y por definición de U_n, esta función es diferenciable en ξ excepto en un conjunto finito de valores, $\xi \in \{t_j^n\}$. Integrando la derivada se tiene que:

$$Ⓗ(t,s)v - U_n(t,s)v = \int_s^t Ⓗ(t,\xi)(A(\xi)-A_n(\xi))U_n(\xi,s)\, v \, d\xi$$

Así,

$$\| Ⓗ(t,s)v - U_n(t,s)v \| \leq M\tilde{M} \exp(\bar{\omega}\,|t-s|)\, \|v\|_Y \; \times$$

$$\times \int_s^t \| A(\xi) - A_n(\xi) \|_{Y \to X} \, d\xi$$

Tomando el lím. cuando $n \to \infty$ y por la convergencia de $A_n(\cdot)$ en $(\mathcal{B}(Y,X), \|\cdot\|_{Y\to X})$ obtenemos

$$Ⓗ(t,s)v = U(t,s)v \qquad \forall\, v \in Y$$

Como Y es denso en X, obtenemos
$Ⓗ(t,s) = U(t,s) \quad \forall \; 0 \leq s \leq t \leq T$ (unicidad)

$\square$

Soluciones regulares (caso hiperbólico)

Y, X Banach, $\overline{Y} = X$, $Y \hookrightarrow X$

$\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ familia de generadores que satisfacen $(H_1)-(H_3)$.

Para $f \in C([S,T];X)$ consideramos el problema de Cauchy:

$$(1) \dots \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = A(t)u + f(t), & 0 \leq s \leq t \leq T \\ u(s) = u_0 \end{cases}$$

Nos fijamos en una subclase de las soluciones clásicas:

$Y \subset D(A(t))$

Definición Una función $u \in C([s,T];Y)$ es una solución Y-valuada de (1) si $u \in C^1([s,T];X)$ que satisface (1).

Una solución Y-valuada es una solución clásica que además $u(t) \in Y \subset D(A(t))$ y es continua en una norma más fuerte $(\|\cdot\|_Y)$.

Teorema 1 (Pazy, pág 146)
Bajo estas hipótesis y $f \in C([s,T];X)$. Entonces el problema (1) con $u_0 \in Y$ tiene una

única solución Y-valuada dada por

$$(2) \ldots \quad u(t) = U(t,s)u_0 + \int_s^t U(t,\xi)f(\xi)\,d\xi$$

donde $U(t,s)$ es la evolución del teorema anterior ($(H_j) \Rightarrow \exists!\, U(t,s)$). [ver Pazy, Teo 4.2, p. 140]

<u>Teorema 2</u> Mismas hipótesis que Teorema 1. Sea $U(t,s)$ la evolución de la familia. Si la evolución satisface:

(E_4) $\quad U(t,s)Y \subset Y \quad \forall \ 0 \leq s \leq t \leq T$

(E_5) $\quad$ Para todo $v \in Y$, $U(t,s)v$ es continua en Y.

Entonces, $\forall u_0 \in Y$, $U(t,s)u_0$ es la única solución Y-valuada del problema homogénea:

$$(3) \ldots \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = A(t)u, & 0 \leq s \leq t \leq T. \\ u(s) = u_0 \end{cases}$$

<u>Definición</u> Sea $\{A(t)\}_{t \in [0,T]}$ satisface (H_1)-(H_3). y su evolución $U(t,s)$. Para cada $f \in L^1([0,T];X)$ y $u_0 \in X$ la función continua

$$(4) \ldots \quad u(t) = U(t,s)u_0 + \int_s^t U(t,\xi)f(\xi)\,d\xi$$

es la solución "mild" al problema (1) $u \in C([0,T];X)$.

Teorema 3 Mismas hipótesis con $f \in C([s,T];X)$ entonces $\forall\, u_0 \in X$ el problema (1) tiene una única solución X-valuada dado por (4).

ver Pazy, teo. 5.2 pg 146.

→ Teorema 4 (Pazy, Theo. 5.3)

$\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ familia (H1) - (H3). tal que $D(A(t)) \equiv D \subset X$, tal que $\forall\, v \in D$ el mapeo $t \mapsto A(t)v$ es continuamente diferenciable en X. Si $f \in C^1([0,T];X)$ entonces $\forall\, u_0 \in D$ el problema (1) tiene una única solución clásica dado por

$$u(t) = U(t,s)u_0 + \int_s^t U(t,\xi) f(\xi)\, d\xi$$

Pendiente: leer Cap. 5 (Pazy) sección de problemas "parabólicos":

$\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ generadores de semigrupos analíticos.