Lección 2.15 : Problema abstracto de Cauchy no homogéneo. Soluciones fuertes.

Problema abstracto de Cauchy no homogéneo:

$$(1)\cdots \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + f, & t>0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

A generador de un C_0-semigrupo

$u : [0,T] \longrightarrow X$ es solución clásica de (1) ssi :

- u continua en $[0,T)$
- u continuamente diferenciable en $(0,T)$
- $u(t) \in D(A) \quad \forall\, t \in (0,T)$
- u resuelve (1).

Si $f \in L^1([0,T]; X)$ entonces

$$(2)\cdots \qquad u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\xi) f(\xi)\, d\xi$$

$$\in C([0,T]; X)$$

es la única solución "mild" de (1).

<u>Teorema 1</u> Sea A generador de un C_0-semigrupo, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Sea $f \in L^1([0,T]; X)$ y continua en $[0,T)$.

Se define

$$(3)\ldots \quad v(t) = \int_0^t S(t-\xi) f(\xi)\, d\xi, \quad t \in [0,T]$$

Entonces, el problema (1) tiene una solución clásica $u: [0,T] \to X$ para cada $u_0 \in D(A)$ si al menos una de las siguientes condiciones se satisface:

(i) $v(t)$ es continuamente diferenciable en $(0,T)$

(ii) $v(t) \in D(A)$ $\forall\, t \in (0,T)$ y $Av(t)$ es continua en $(0,T)$.

Si (1) tiene una solución clásica para $u_0 \in D(A)$ entonces v satisface (i) y (ii).

<u>Demostración</u> Si (1) tiene una solución clásica entonces ésta está determinada por la fórmula (2). Así,

$$v(t) = u(t) - S(t)u_0$$

es diferenciable $\forall t > 0$. Además,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt} - S(t)Au_0$$

es continua en $(0,T)$. Entonces v satisface (i).

Además, $u_0 \in D(A) \Rightarrow S(t)u_0 \in D(A)$ $\forall t \geq 0$.

Por ende, $v(t) = \underbrace{u(t)}_{\substack{\in D(A) \\ \text{sol. clásica}}} - S(t)u_0 \in D(A)$ $\forall t > 0$

Asimismo,

$$Av(t) = Au(t) - AS(t)u_0$$

$$= \underbrace{\frac{du}{dt} - f(t) - AS(t)u_0}_{\text{continua en } t \in [0,T]}.$$

ya que u es solución clásica, f es continua por hipótesis y $t \mapsto AS(t)u_0 = S(t)Au_0$ es continua. Así, v también satisface (ii).

Por otra parte, para todo $h > 0$ tenemos la identidad

$$\frac{1}{h}(S(h) - I)v(t) = \frac{1}{h}(S(h) - I)\int_0^t S(t-\xi)f(\xi)d\xi$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^t S(t+h-\xi)f(\xi)d\xi - \frac{v(t)}{h}$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} S(t+h-\xi)f(\xi)d\xi - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-\xi)f(\xi)d\xi - \frac{v(t)}{h}$$

$$= \frac{1}{h}(v(t+h) - v(t)) - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-\xi)f(\xi)d\xi$$

Por la continuidad de $f(t)$ se tiene:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-\xi)\, f(\xi)\, d\xi = f(t)$$

Por lo tanto, si suponemos (i)

$$\frac{1}{h}\left(S(h)-I\right)v(t) \longrightarrow \frac{dv}{dt} - f(t)$$

si $h \to 0^+$

Esto implica que $v(t) \in D(A)$ $\forall\, t \in (0,T)$.
Además,

$$Av(t) = \frac{dv}{dt} - f(t) \qquad \forall\, t \in (0,T).$$

Como $v(0) = 0$, así deducimos que

$$u(t) = S(t)u_0 + v(t)$$

es solución clásica de (1).

Si suponemos (ii) entonces $v(t) \in D(A)$ $\forall\, t \in (0,T)$ y $t \mapsto Av(t)$ es continuo $\forall t$.

$v(t) \in D(A) \Rightarrow$ $t \mapsto v(t)$ es diferenciable por la derecha y además:

$$\frac{D^+ v(t)}{Dt} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\left(v(t+h) - v(h) \right)$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \left[\frac{1}{h} \left(S(h) - I \right) v(t) + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(h+t-\xi) f(\xi) \right]$$

$$= Av(t) + f(t).$$

Como $\frac{D^+ v}{Dt}$ es continua en $(0,T)$, deducimos que $v(t)$ es continuamente diferenciable en $(0,T)$ y además

$$\frac{dv}{dt} = Av(t) + f(t) \qquad \forall\, t \in (0,T)$$

Como $v(0) = 0$, deducimos que

$$u(t) = S(t)\, u_0 + v(t)$$

es solución clásica de (I).

$\square$

Como consecuencia tenemos:

<u>Corolario 1</u> Sea A generador de C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Sea $f \in L^1((0,T); X)$, f continua en $[0,T]$. Si además, $f(\xi) \in D(A)$ $\forall\ 0 < \xi < T$ y $Af(\xi) \in L^1([0,T]; X)$ entonces $\forall\, u_0 \in D(A)$, el problema (I) tiene una única solución clásica en $(0,T)$.

Demostración: De las hipótesis tenemos: para $t > \xi > 0$, $S(t-\xi)f(\xi) \in D(A)$ y $A S(t-\xi)f(\xi) = S(t-\xi) Af(\xi)$ es integrable. Por lo tanto,

$$v(t) = \int_0^t S(t-\xi) f(\xi)\, d\xi \quad \in D(A) \quad \forall\, t \in (0,T)$$

y además,

$$\begin{aligned} Av(t) &= A \int_0^t S(t-\xi) f(\xi)\, d\xi \\ &= \int_0^t S(t-\xi) Af(\xi)\, d\xi \end{aligned}$$

es continua en $t \in (0,T)$. Por el teorema L $v(t)$ satisface (ii) y concluimos que (1) con $u_0 \in D(A)$ arbitrario tiene una solución clásica. Es única por la unicidad de la solución "mild".

$\square$

Corolario 2 A generador de C_0-semigrupo
Sea $f \in C^1([0,T]; X)$. Entonces $\forall\, u_0 \in D(A)$ el problema (1) tiene una única solución clásica.

Dem. $v(t) = \int^t S(t-\xi) f(\xi)\, d\xi$ es continuamente diferenciable en $t \in (0,T)$:

En efecto, $v(t) = \int_0^t S(\tau) f(t-\tau)\, d\tau$

$\tau = t - \xi$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = S(t) f(t) + \int_0^t S(\tau) \frac{df}{dt}(t-\tau)\, d\tau$$

$$= S(t) f(t) + \int_0^t S(t-\xi) \frac{df}{dt}(\xi)\, d\xi$$

$v(t)$ satisface (i) y por el teorema 1 tiene una única solución clásica

$\square$

<u>Corolario 3</u> Sea $f \in L^1([0,T];X)$. Si u es solución "mild" de (1) con $u_0 \in X$ entonces para todo $0 < \tilde{T} < T$, u es el límite uniforme en $[0, \tilde{T}]$ de soluciones clásicas al problema (1).

<u>Dem.</u> A generador $\Rightarrow$ $D(A)$ es denso en X, y $\|S(t)\| \leq M e^{\omega t}$, $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Sea $u_0 \in X$. $\overline{D(A)} = X$ $\Rightarrow$ $\exists\ u_n^{(0)} \in D(A)$ tal que $u_n^{(0)} \to u_0$ si $n \to \infty$. Además, $C^1([0,T];X)$ es denso en $L^1([0,T];X)$ (ejercicio: usar Friedrichs alisador con int. de Bochner). Entonces $\exists\ f_n \in C^1([0,T];X)$ tal que

$$f_n \to f \quad \text{en } L^1([0,T];X)$$
si $n \to \infty$.

Por el corolario 2, sea $u_n : [0,T] \to X$ la solución clásica de

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} = Au_n + f_n, & t>0 \\ u_n(0) = u_n^{(0)} \in D(A) \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$$

que satisface

$$u_n(t) = S(t)u_n^{(0)} + \int_0^t S(t-\xi) f_n(\xi)\, d\xi$$

Como $u : [0,T] \to X$ es solución "mild" de (1):

$$\|u_n(t) - u(t)\| \leq \| S(t) (u_0 - u_n^{(0)}) \| + \int_0^t \| S(t-\xi)(f_n(\xi) - f(\xi))\| \, d\xi$$

$$\leq M e^{\omega t} \underbrace{\| u_0 - u_n^{(0)} \|}_{\to 0 \text{ si } n\to\infty} + \underbrace{M \int_0^t e^{\omega(t-\xi)} \| f_n(\xi) - f(\xi) \| \, d\xi}_{\leq e^{\omega t} \| f_n - f \|_{L^1([0,T];X)} \to 0 \text{ si } n \to \infty}$$

concluimos la convergencia

$$\|u_n(t) - u(t)\| \longrightarrow 0 \qquad n \to \infty$$

en compactos de t, en $[0, \tilde{T}]$, $\forall\, \tilde{T} < T$ $\square$

Definición Sea $u : [0,T] \to X$ diferenciable c.d.s. en $t \in [0,T)$, tal que

$$\frac{du}{dt} \in L^1([0,T]; X)$$

u se denomina solución <u>fuerte</u> de (1) con $u_0 \in X$ si $u(0) = u_0$ y
$$\frac{du}{dt} = Au(t) + f(t) \quad \text{c.d.s. en } t \in [0,T].$$

Observación Si $A \equiv 0$ y $f \in L^1([0,T]; X)$ el problema (1) no tiene solución clásica a menos que f sea también continua. Pero siempre tiene solución fuerte:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(\xi)\, d\xi$$

u es diferenciable c.d.s. en $t \in [0,T]$.

Lema A generador de un C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, $f \in L^1([0,T]; X)$. Si $u : [0,T] \to X$ es solución fuerte de (1) para cierto $u_0 \in X$ entonces u está determinada por (2) (es la solución "mild") y es la única solución fuerte de (1) con $u_0 \in X$.

Dem: Definimos $g(\xi) = S(t-\xi)u(\xi)$

$$\forall\ 0 < \xi < t, \qquad t \in (0,T).$$

Entonces g es diferenciable c.d.s. en $(0,t)$:

$$\frac{dg}{d\xi} = -AS(t-\xi)u(\xi) + S(t-\xi)\frac{du}{d\xi}$$
$$= -AS(t-\xi)u(\xi) + S(t-\xi)\Big(Au(\xi)+f(\xi)\Big)$$
$$= S(t-\xi)f(\xi) \quad \text{c.d.s. en } \xi\in(0,t).$$

Además, $\frac{dg}{d\xi} \in L^1([0,t];X)$ ya que $f\in L^1([0,T];X)$. Integrando en $\xi\in(0,t)$ obtenemos

$$g(t)-g(0) = u(t) - S(t)u_0$$
$$= \int_0^t S(t-\xi)f(\xi)\,d\xi$$
c.d.s. en $t\in(0,T)$

Es decir, u coincide con la solución "mild". $\square$

Corolario 4 $\forall\, u_0\in X$ y cada $f\in L^1([0,T];X)$ el problema de Cauchy tiene, a lo sumo, una única solución fuerte.

Corolario 5 $\forall\, u_0\in D(A)$, $\forall\, f\in L^1([0,T];X)$ el problema (1) tiene a lo sumo una única solución clásica.

<u>Teorema 2</u> A generador de C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Sean $f \in L^1([0,T];X)$ y

$$v(t) = \int_0^t S(t-\xi) f(\xi) \, d\xi$$

El problema (1) tiene una única solución fuerte $\forall u_0 \in D(A)$ si se cumple al menos una de las siguientes condiciones:

(i) $v(t)$ es diferenciable c.d.s. en $t \in [0,T]$ y $\frac{dv}{dt} \in L^1([0,T];X)$.

(ii) $v(t) \in D(A)$ c.d.s. en $t \in [0,T]$ y $Av(t) \in L^1([0,T];X)$

Si (1) tiene una solución fuerte para $u_0 \in D(A)$ entonces se cumplen (i) y (ii).

<u>Dem.</u> Ejercicio (casi la misma prueba que Teorema 1; usar $v(t) \in L^1([0,T];X)$)

<u>Corolario 6</u> A generador y f diferenciable c.d.s. en $[0,T]$ con $\frac{df}{dt} \in L^1([0,T];X)$. Entonces $\forall u_0 \in D(A)$ existe una única solución fuerte de (1).

<u>Dem.</u> Ejercicio (ver Corolario 1) $\square$

<u>Corolario 7</u> A generador de C_0-semigrupo. $f \in L^1([0,T];X)$, f continua en $[0,T]$, $f(t) \in D(A)$ c.d.s. en $t \in [0,T]$, $Af(t) \in L^1([0,T];X)$. Entonces $\forall u_0 \in D(A)$ el problema (1) tiene una única solución fuerte.

<u>Dem.</u> Ejercicio

$\square$

<u>Teorema 3</u> Sea A generador de un C_0-semigrupo, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Sea $f \in C([0,T];X)$. Si al menos una de las siguientes condiciones se satisface:

(i) $f \in L^1([0,T]; D(A))$

(ii) $f \in W^{1,1}([0,T]; X)$

entonces para cada $u_0 \in D(A)$ el problema (1) tiene una única solución clásica.

<u>Demostración</u> Basta considerar el caso $u_0 = 0 \in D(A)$. Entonces hay que probar que:

Si f satisface $\left\{ \begin{matrix} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \end{matrix} \right\}$ entonces

$\in C([0,T];X)$

$$v(t) = \int_0^t S(t-\xi) f(\xi)\, d\xi \in C^1([0,T];X)$$

Por lo tanto, ésta es la única solución clásica con $u_0 = 0 \in D(A)$. (La unicidad se deduce del corolario.)

(ii): $f \in C([0,T];X)$ y satisface (ii).
En este caso,

$$\frac{1}{h}\left(v(t+h) - v(t)\right) = \int_0^t S(t-\xi)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)f(\xi)\,d\xi$$

$$+ \int_t^{t+h} \underbrace{S(t+h-\xi)f(\xi)\,d\xi}_{\to f(t),\ h\to 0}$$

Por definición de $D(A)$,

$$\|S(h)u_0 - u_0\| \leq \|Au_0\|\, h \qquad \forall\, u_0 \in D(A),\ \forall\, h>0$$

Por convergencia dominada

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)f = Af \quad \text{en } L^1([0,T];X)$$

Así,

$$\frac{D^+v}{Dt} = \underbrace{\int_0^t S(t-\xi)Af(\xi)\,d\xi}_{\in C([0,T];X)} + \underbrace{f(t)}_{\in C([0,T];X)}$$

$\Rightarrow$ $\dfrac{D^+v}{Dt}$ es continua $\forall\, t \in (0,T)$

concluimos $v(t) \in C^1([0,T];X)$.

(ii) : Ahora $f \in C([0,T];X)$ satisface $f \in W^{1,1}([0,T];X)$

Entonces, $\forall\, t \in [0,T)$, $\forall\, h \in (0,T)$, tenemos que

$$\frac{1}{h}\left(v(t+h) - v(t)\right) = \int_0^t S(\xi)\, h^{-1}\left(f(t+h-\xi) - f(t-\xi)\right) d\xi$$

$$+ \frac{S(h)}{h} \int_0^t S(t-\xi) f(\xi)\, d\xi$$

$f \in W^{1,1}([0,T];X)$ tenemos que

$$f'(\cdot) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(t+h-\cdot) - f(t-\cdot)}{h}$$

$$\in L^1((0,t);X) \quad \forall\, t \in [0,T) \text{ fijo.}$$

Además,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)}{h} \int_0^t S(t-\xi) f(\xi)\, d\xi = S(t) f(0)$$

Por lo tanto,

$$\frac{D^+ v}{Dt} = \lim_{h \to 0^+} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$$

$$= S(t) f(0) + \int_0^t S(\xi) f'(t-\xi)\, d\xi \quad \forall\, t \in [0,T)$$

$$S(t)f(0) \in C([0,T);X)$$

$$\int_0^t S(s) f'(t-s)\, ds \in C([0,T];X)$$

$$f' \in L^1([0,T];X)$$

$\Rightarrow \dfrac{D^+v}{Dt}$ es continua en $[0,T]$

Concluimos $v(t) \in C^1([0,T];X)$

Para el caso general $u_0 \in D(A)$, sabemos que $S(t)u_0$ es la única solución clásica del problema homogéneo

$$\Rightarrow \quad u(t) = S(t)u_0 + v(t)$$

es la única solución clásica de (1)

$\square$