Lección 2.1: Semigrupos fuertemente continuos. Definición y propiedades básicas.

Definición (C_0-semigrupo)

Un semigrupo fuertemente continuo (ó C_0-semigrupo) en un espacio de Banach X, es una familia de operadores lineales y acotados de X en X, $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$, indexada por $t \in [0,\infty)$, que satisface:

(S$_1$) $S(0) = Id$

(S$_2$) $S(t)S(s) = S(t+s)$, $\forall\, t,s \geq 0$

(S$_3$) Para cada $u \in X$, fijo, el mapeo

$$\begin{cases} S(t)u : [0,\infty) \to X \\ t \mapsto S(t)u \end{cases}$$

es continuo de $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ en X.

Observación: La condición (S$_3$) se conoce como continuidad fuerte. En ocasiones, (S$_1$) y (S$_2$) se conocen como "propiedades de semigrupo". Si (S$_1$)$-$(S$_3$) se cumplen $\forall t \in \mathbb{R}$ hablamos de un C_0-grupo. C_0 es abreviación de "sumable en sentido de Césaro de orden 0".

Podemos reemplazar (S$_3$) por la noción de continuidad uniforme en la topología de $\mathcal{B}(X)$

Definición Un semigrupo uniformemente continuo en un espacio de Banach $\underline{X}$ es una familia de operadores lineales y acotados, $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\underline{X})$ que satisfacen (S_1) y (S_2) y además

(S_3') : el mapeo $\begin{cases} t \mapsto S(t) \\ [0,\infty) \to \mathcal{B}(\underline{X}, \|\cdot\|_{\underline{X}\to\underline{X}}) \end{cases}$

es continuo en $\mathcal{B}(\underline{X})$, en la topología de $\|\cdot\|_{\underline{X}\to\underline{X}}$.

Observación : La propiedad (S_3') es equivalente a

$$\lim_{t\to 0} S(t) = Id \quad \text{en } \mathcal{B}(\underline{X})$$

es decir,
$$\lim_{t\to 0} \|S(t) - Id\|_{\underline{X}\to\underline{X}} = 0.$$

La propiedad (S_3') es más fuerte que (S_3) (semigrupo uniformemente continuo $\Rightarrow$ C_0-semigrupo).

Lema Todo semigrupo uniformemente continuo es un C_0-semigrupo.

Demostración : Sea $u \in \underline{X}$, $u \neq 0$. Definimos $v := u/\|u\| \in \underline{X}$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\|S(t_1)v - S(t_2)v\| \leq \sup_{\substack{v\in X \\ \|v\|\leq 1}} \|(S(t_1)-S(t_2))v\|$$
$$= \|S(t_1) - S(t_2)\|_{X\to X} < \varepsilon$$

siempre que $|t_1-t_2| < \delta$, $t_2, t_1 \geq 0$ para cierto $\delta>0$, ya que el semigrupo es uniformemente continuo. Es decir, $\forall\, u\in X$ fijo, $t \mapsto S(t)u$ es continuo en X. (propiedad (S_3)). $\square$

Nota: la noción de semigrupo uniformemente continuo es de nula (o casi nula) aplicabilidad a EDPs.

La elección del espacio es importante.

Ejemplo: Sea $X = L^2(\mathbb{R})$. Definimos:

$$\left.\begin{aligned} S(t) &: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \\ (S(t)u)(x) &:= u(x+t) \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (1)$$

$S(t)$ es el operador "shift" o de traslación. La norma en $L^2(\mathbb{R})$ es invariante bajo traslaciones, por lo tanto $S(t)u \in L^2(\mathbb{R})$ siempre que $u\in L^2(\mathbb{R})$. Además, $\|S(t)u\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$, $\forall\, t\geq 0$. $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$. Mas aún, es claro que $S(0)u = u \in L^2$ y además, $(S(t+s)u)(x) = (S(t)(S(s)u))(x)$, $\forall\, t,s\geq 0$.

Además como $\|S(t)u\|_{L^2} = \|u\|_{L^2} \quad \forall t \geq 0$ el mapeo $t \mapsto S(t)u$ es continuo en $L^2(\mathbb{R})$.

$\therefore \quad \{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0- semigrupo en $L^2(\mathbb{R})$.

Sin embargo, no es un semigrupo fuertemente continuo en $L^2(\mathbb{R})$. En efecto, si $t \neq 0$ entonces,

$$\|S(t) - S(s)\|_{L^2\to L^2} = \sup_{\substack{v\in L^2(\mathbb{R})\\ \|v\|_{L^2}\leq 1}} \|(S(t)-S(s))v\|_{L^2}$$

tomando $t > 0 = s$, para cada $t > 0$ fijo definimos

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \chi_{[0,t]}(x) \in L^2(\mathbb{R})$$

claramente $\|u\|_{L^2} = 1$, y además

$$\|(S(t) - Id)u\|_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} (u(x+t) - u(x))^2 \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} u(x+t)^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}} u(x)^2 \, dx \underbrace{- 2\int_{\mathbb{R}} u(x+t)\, u(x) \, dx}_{=0 \text{ ya que supp } u \subset [0,t]}$$

$$= 2\|u\|_{L^2}^2 = 2$$

$$\therefore \quad \|S(t) - Id\|_{L^2\to L^2} = 2$$

El semigrupo no es uniformemente continuo.

Si consideramos el mismo semigrupo ahora en $X = C_b(\mathbb{R})$ entonces tampoco es un C_0-semigrupo (ejercicio: la convergencia de $S(t)u$ a u cuando $t \to 0^+$ puede no ser uniforme).

Principio de acotamiento uniforme: Sean X, Y espacios de Banach, $\alpha \in J$ índices, y $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J} \subset \mathcal{B}(X, Y)$, una familia de operadores lineales y acotados de X en Y, indexada por $\alpha \in J$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\sup_{\alpha \in J} \| T_\alpha \|_{X \to Y} < \infty$

(ii) $\sup_{\alpha \in J} \| T_\alpha u \|_{Y} < \infty, \quad \forall u \in X$

(iii) $\sup_{\alpha \in J} | \langle \ell, T_\alpha u \rangle | < \infty, \quad \forall u \in X, \ \forall \ell \in Y^*$

Ver: Dunford-Schwarz, Yosida, Bressan, ...

<u>Lema auxiliar</u> Sea X de Banach. Sea $F: K \subset \mathbb{R} \to \mathcal{B}(X)$, una función de un subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ en $\mathcal{B}(X)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) F es continua en la topología fuerte, es decir, los mapeos $K \ni t \mapsto F(t)u \in \mathfrak{X}$ son continuos para cada $u \in \mathfrak{X}$ fijo.

(b) F es uniformemente acotada en K y los mapeos $K \ni t \mapsto F(t)u \in \mathfrak{X}$ son continuos $\forall u \in D$, D denso en $\mathfrak{X}$.

(c) F es continua en la topología de la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de $\mathfrak{X}$, es decir, el mapeo

$$K \times C \ni (t,u) \mapsto F(t)u \in \mathfrak{X}$$

es uniformemente continuo para todo $C \subset \mathfrak{X}$, C compacto.

<u>Demostración</u>:

<u>(c) ⇒ (a)</u>: Es trivial: si $F(t)u$ es unif. continuo en $K \times C$ $\forall C \subset \mathfrak{X}$, compact entonces para $u_0 \in \mathfrak{X}$ fijo basta con tomar un $C_0 \subset \mathfrak{X}$ compacto tal que $u_0 \in C_0$ para deducir la continuidad de $K \ni t \mapsto F(t)u_0$, es decir, (a).

<u>(a) ⇒ (b)</u>: Como $F(t)u$ es continuo en $t \in K$, compacto ($u \in \mathfrak{X}$ fijo), tenemos

$$\sup_{t \in K} \|F(t)u\| < \infty \qquad \forall u \in \mathfrak{X}.$$

Por el principio de acotamiento uniforme concluimos que

$$\sup_{t\in K} \|F(t)\|_{X\to X} < \infty$$

Es decir, F es uniformemente acotada en K. La continuidad de $K \ni t \mapsto F(t)u$ para $u \in D$, D denso en X, es automática a partir de (a).

(b) ⇒ (c) : Supongamos que $\|F(t)\|_{X\to X} \leq M < \infty$ $\forall\, t \in K$ y fijamos $\varepsilon > 0$ y $C \subset X$, compacto. Entonces existe un número finito de elementos $u_1, \dots, u_m \in D$ (D denso en X), $m \in \mathbb{N}$, tales que

$$C \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_{\varepsilon/M}(u_j)$$

Por continuidad existe $\delta > 0$ tal que

$$\| F(t)u_j - F(s)u_j \| < \varepsilon \qquad \forall \quad 1 \leq j \leq m$$

siempre que $|t-s| < \delta$, $t, s \in K$. Así, para $u, v \in C$ arbitrarios, y $s, t \in K$ tales que

$$\|u - v\| < \frac{\varepsilon}{M} \qquad y \qquad |t-s| < \delta$$

obtenemos la estimación siguiente:

$$\|F(s)u - F(t)v\| \le \underbrace{\|F(s)(u-u_j)\|}_{\le M\left(\frac{\varepsilon}{M}\right) \text{ si } u \in B_{\varepsilon/M}(u_j)} + \underbrace{\|(F(s)-F(t))u_j\|}_{\le \varepsilon \text{ ya que } |t-s|<\delta} + \underbrace{\|F(t)(u_j-u)\|}_{\le M(\varepsilon/M)} + \underbrace{\|F(t)(u-v)\|}_{\le M(\varepsilon/M) \quad \|u-v\|\le\varepsilon}$$

$$< 4\varepsilon$$

Es decir, $\underset{\in K\times C}{(t,u)} \longmapsto F(t)u$ es uniformemente continuo. $\square$

El siguiente resultado es útil: provee condiciones equivalentes a continuidad uniforme.

<u>Teorema</u> Sea $\{S(t)\}_{t\ge 0} \subset \mathcal{B}(X)$ una familia de operadores que satisfacen (S_1) y (S_2). Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(A) $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ es un C_0-semigrupo (es decir, también satisface (S_3))

(B) $\lim_{t\to 0^+} S(t)u = u$ en X, $\forall u \in X$.

(c) Existen $\delta > 0$, $M \geq 1$ y un subconjunto denso en X, $D \subset X$, tales que

(i) $\|S(t)\|_{X \to X} \leq M \quad \forall t \in [0,\delta]$

(ii) $\lim_{t \to 0^+} S(t)u = u$ en X, $\forall u \in D$.

<u>Demostración</u>:

<u>(c) ⇒ (B)</u> Sea $t_n \geq 0$ una sucesión arbitraria tal que $t_n \to 0^+$ si $n \to \infty$. Definimos

$$K := \{ t_n : n \in \mathbb{N} \} \cup \{0\}$$

Claramente $K \subset [0,\infty)$ es cerrado y acotado (compacto). Tomando $n \gg 1$ suficientemente grande podemos suponer $K \subset [0,\delta]$ (ya que $t_n \to 0^+$).

Por (c)(i), $\|S(t)\|_{X \to X} \leq M \quad \forall t \in K$.
Tomando $t_0, t_0 + h \in K$ y aplicando (S_2) tenemos que, $\forall u \in D$:

$$\|S(t_0+h)u - S(t_0)u\| \overset{\text{si } h \geq 0}{=} \|S(t_0)(S(h)u - u)\|$$

$$\leq M \underbrace{\|S(h)u - u\|}_{\to 0 \text{ si } h \to 0^+ \text{ por (c)(ii)}}$$

Si $h<0$ entonces

$$\|S(t_0+h)u - S(t_0)u\| = \|S(t_0+h)(u - S(-h)u)\|$$

$$\leq M \underbrace{\|S(-h)u - u\|}_{\to 0 \text{ si } (-h)\to 0^+}$$

De este modo, los mapeos $K \ni t \mapsto S(t)u$ son continuos $\forall\, u \in D$, D denso en X. Por el lema auxiliar: los mapeos $K \ni t \mapsto S(t)u$ son continuos $\forall\, u \in X$. Así,

$$\lim_{n\to\infty} S(t_n)u = u, \quad \forall\, u \in X.$$

como $t_n \to 0^+$ es arbitraria concluimos (B).

(B) $\Rightarrow$ (A) Sean $t_0 > 0$ y $u \in X$. Por continuidad por la derecha:

$$0 \leq \lim_{h\to 0^+} \|S(t_0+h)u - S(t_0)u\|$$

$$\leq \|S(t_0)\| \underbrace{\lim_{h\to 0} \|S(h)u - u\|}_{=0 \text{ por (B)}}$$

Si $h<0$ entonces

$$\|S(t_0+h)u - S(t_0)u\| \leq \|S(t_0+h)\| \underbrace{\|u - S(-h)u\|}_{\to 0 \text{ por (B) si } h\to 0^-}$$

por continuidad, siempre y cuando $\|S(t_0+h)\|$ permanezca acotado para todo $t_0+h \in [0,t_0]$. Pero esto es cierto gracias al principio de acotamiento uniforme en el intervalo compacto $[0,t_0]$. Es decir, también tenemos continuidad por la izquierda. Esto implica (A).

(A) $\Rightarrow$ (C) : (A) implica directamente (C)(ii). Para demostrar (C)(i) procedemos por contradicción. Supongamos que existe $\xi_n \geq 0$ tal que $\xi_n \to 0^+$ y $\|S(\xi_n)\| \to \infty$ si $n \to \infty$. Por el principio de acotamiento uniforme entonces existe $u \in X$ tal que la sucesión

$$r_n := \|S(\xi_n)u\| \quad \text{no es acotada.}$$

Esto es una contradicción con la continuidad del mapeo $t \mapsto S(t)u$ en $t=0$.

El teorema está demostrado.

$\square$

Observación :

- Probar (B) es equivalente a (S_3).
  $\lim_{t \to 0^+} S(t)u = u \quad \forall u \in X$.
- Si (B) se dificulta ($\forall u \in X$) basta con probar - $\|S(t)\|$ unif. acotado para $t \in [0,\delta]$
  y - continuidad por la derecha $\forall u \in D$ denso.

Lema. Para todo C_0-semigrupo, $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ existen constantes $\omega \in \mathbb{R}$, y $M \geq 1$ tales que

$$(2) \cdots \qquad \|S(t)\|_{X\to X} \leq M e^{\omega t} \qquad \forall t \geq 0$$

Demostración: Por el teorema anterior y principio de acotamiento uniforme existe $M \geq 1$ tal que

$$\|S(s)\|_{X\to X} \leq M \qquad \forall s \in [0,1]$$

Cada $t \geq 0$ se puede escribir de la forma $t = n+s$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $s \in [0,1]$, de modo que

$$\begin{aligned} \|S(t)\|_{X\to X} &= \|S(n+s)\|_{X\to X} \\ &= \|S(s)S(n)\|_{X\to X} \\ &\leq \|S(s)\|_{X\to X} \, \|S(n)\|_{X\to X} \\ &\leq M \cdot \|S(1)\|^n_{X\to X} \\ &= M^{1+n} \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \|S(t)\|_{X\to X} &\leq M e^{n \log M} \\ &\leq M e^{\omega t} \end{aligned}$$

ya que $t \geq n$ y tomando $\omega := \log M \in \mathbb{R}$ $\square$

Definición Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo en X, Banach.

(a) Se dice que el semigrupo es de <u>tipo</u> <u>(M,ω)</u> si se cumple

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \forall\, t\geq 0 \quad \ldots (2)$$

para cierto $M\geq 1$, $\omega\in\mathbb{R}$.

(b) El semigrupo se denomina <u>cuasi-contractivo</u> si es de tipo $(1,\omega)$, es decir, si

$$\|S(t)\| \leq e^{\omega t} \quad \forall\, t\geq 0 \quad \ldots (3)$$

(c) El semigrupo se denomina <u>acotado</u> si es de tipo $(M,0)$ con cierto $M\geq 1$, es decir, si

$$\|S(t)\| \leq M, \quad \forall\, t\geq 0 \quad \ldots (4)$$

(d) El semigrupo es <u>contractivo</u> si es de tipo $(1,0)$, es decir, si

$$\|S(t)\| \leq 1, \quad \forall\, t\geq 0 \quad \ldots (5)$$

(e) El semigrupo se denomina <u>isométrico</u> si

$$\|S(t)u\| = \|u\| \quad \forall\, t\geq 0, \ \forall\, u\in X$$

$\ldots (6).$

<u>Observación</u> Por el lema, todo C_0-semigrupo es de tipo (M,ω) para algún $M\geq 1$ y algún $\omega\in\mathbb{R}$. El ínfimo de los valores $\omega\in\mathbb{R}$ para los cuales $\exists$ $M\geq 1$ tal que (2) se cumple es importante.

<u>Definición</u> (cota de crecimiento)
Para todo C_0-Semigrupo, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, se define su <u>cota de crecimiento</u> como

$$(6)\cdots \quad \omega_0 := \inf\left\{\omega\in\mathbb{R} : \text{existe } M_\omega\geq 1 \text{ tal que } \|S(t)\|\leq M_\omega e^{\omega t}\ \forall t\geq 0\right\}$$

<u>Observaciones</u> :

(A) claramente $-\infty\leq\omega_0<\infty$ (lema), pero sí puede ocurrir $\omega_0=-\infty$.
Por ejemplo, $X=L^p(a,b)$, con $1\leq p<\infty$ y $-\infty<a<b<\infty$. Definimos los operadores

$$(S_L(t)u)(x) := \begin{cases} u(x+t), & \text{si } x+t\leq b \\ 0, & \text{si } x+t>b \end{cases}$$

Semigrupo de "traslaciones izquierdas".
Es fácil demostrar que $\{S_L(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo en $L^p(a,b)$. (ejercicio).

Nota: vamos a tener una exponencial "$S_L(t)=e^{tA}$" tal que se anula si $t\geq T_0>0$.

En efecto : $\begin{cases} S_L(t) \equiv 0 \quad \in \mathcal{B}(L^p(a,b)) \\ \forall\ t > b-a > 0 \end{cases}$

Este es un ejemplo de un semigrupo nilpotente : $S(t) \equiv 0 \quad \forall\ t \geq T_0 > 0, \quad \infty > T_0.$

Es fácil verificar que

$$\omega_0 = \inf \{ \omega \in \mathbb{R} : \|S(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t} \ \forall t \geq 0 \}$$

$$= -\infty \qquad \text{si el semigrupo es nilpotente.}$$

$\omega_0 = -\infty$ también ocurre para semigrupos no necesariamente nilpotentes :

Tarea I-1 $\quad X = C_0((-\infty, 0])$

$$:= \{ u \in C((-\infty,0]) : \lim_{x \to -\infty} u(x) = 0 \}$$

Sea $\quad (S(t)u)(x) := e^{-t^2+2xt} u(x-t)$

Verificar que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un C_0-semigrupo en el espacio de Banach $C_0((-\infty,0])$ y que $\omega_0 = -\infty$.

Sin embargo, $S(t) \neq 0 \in \mathcal{B}(C_0((-\infty,0]))$ para todo $t \geq 0$.

(B) El ínfimo en (6) puede no alcanzarse, es decir, puede suceder que no exista constante $M \geq 1$ tal que $\|S(t)\| \leq Me^{\omega_0 t}$ $\forall t \geq 0$. Ejemplo: $X = \mathbb{C}^2$ y la familia de matrices

$$S(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall t \geq 0$$

Define un C_0-semigrupo en $\mathbb{C}^2$. Tomemos $0 < \omega < 1$ es fácil ver que $\exists\ M(\omega) \geq 1$ tal que $\|S(t)\| = O(1+t) = 1+t \leq M(\omega) e^{\omega t}$ $\forall t \geq 0$. Ya que $e^{-\omega t}(1+t) \to 0$ si $t \to \infty$. Basta con tomar $M(\omega) = e^{-1+\omega}/\omega \geq 1$. Así, $\omega_0 = 0$. Sin embargo,
$\|S(t)\| = O(1+t) \to \infty$ si $t \to \infty$.
El semigrupo no es acotado.

(C) constantes $M > 1$ (desigualdad estricta) pueden ser necesarias, es decir, sin importar qué tan grande tomemos $\omega > \omega_0$, $\|S(t)\|$ no está acotada superiormente por $e^{\omega t}$ $\forall t \geq 0$ (no todos los semigrupos son cuasi-contractivos).

Ejemplo: $X = L^1(\mathbb{R})$, se define

$$(S(t)u)(x) := \begin{cases} 2u(x+t), & \text{si } x \in [-t, 0] \\ u(x+t), & \text{otro caso} \end{cases}$$

(semigrupo de traslaciones con salto).

Es un C_0-semigrupo (ejercicio)

$$\| S(t)\chi_{[0,t]}(x)\|_{L^1} = 2\,\|\chi_{[0,t]}(x)\|_{L^1}$$

$$\therefore \quad \|S(t)\| = 2.$$

Es acotado pero no cuasi-contractivo
$\|S(t)\| \leq M e^{\omega t}$ $\forall t \geq 0$ requiere $M > 1$.