Ecuaciones Diferenciales Parciales. Tarea 1.

1. Considera el siguiente problema:

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= f, \quad 0 < x < R,\ t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= 0, \quad 0 < x < R, \end{aligned}$$

donde $c > 0$ es constante, $R > 0$, y $f = f(x,t)$ es una función conocida.

(a) Demuestra el *lema de Gronwall*: sea $\eta = \eta(t)$ una función no negativa, $\eta \geq 0$, continuamente diferenciable en $t \in [0,T]$, que satisface la desigualdad

$$\frac{d\eta}{dt} \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

donde $\phi = \phi(t)$ y $\psi = \psi(t)$ son funciones no negativas, integrables en $[0,T]$. Entonces,

$$\eta(t) \leq \exp\left(\int_0^t \phi(s)\,ds\right)\left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds\right),$$

para todo $t \in [0,T]$.

(b) Demuestra la siguiente estimación de estabilidad:

$$\int_0^R u(x,t)^2\,dx \leq e^t \int_0^t \int_0^R f(x,s)^2\,dx\,ds.$$

(*Sugerencia:* Multiplica la ecuación por u. Usa el hecho que $c > 0$ y la desigualdad $2uf \leq u^2 + f^2$ para obtener

$$\frac{d}{dt}\int_0^R u(x,t)^2\,dx \leq \int_0^R f(x,t)^2\,dx \ + \int_0^R u(x,t)^2\,dx.$$

Aplica el lema de Gronwall.)

2. Escribe una fórmula explícita para la solución de la ecuación de transporte con decaimiento,

$$\begin{aligned} u_t + \mathbf{a}\cdot\nabla u + cu &= 0, \qquad x \in \mathbb{R}^d,\ d \geq 1,\ t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ es un vector constante, $c \in \mathbb{R}$ es constante, y $\nabla u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_d})^\top \in \mathbb{R}^d$. Aquí $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es de clase C^1. Comprueba que la respuesta es, en efecto, solución del problema.

3. Encuentra una solución a la ecuación

$$xu_x + yu_y = 2u,$$

con datos iniciales $u(x,0) = x^2$ para todo $x > 0$. ¿Es única? Si no lo es, encuentra una familia infinita de soluciones de clase C^1.

4. Demuestra que la familia de soluciones

$$u = \alpha x + (1-\alpha)y,$$

para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ genera a todas las soluciones de clase C^1 del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= u, \\ u(x,x) &= x, \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(*Sugerencia:* Suponiendo que existe otra solución $w = w(x,y)$ de clase C^1 que no pertenece a la familia, sea $v = w - u$, donde u es cualquier elemento de la familia. Aplica los argumentos del problema inverso para ecuaciones cuasi-lineales y concluye.)

5. Encuentra una solución a la ecuación

$$xu_x + yu_y = 4u,$$

tal que $u = 1$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. ¿Es única? Explica tu respuesta.

6. Considera la ecuación lineal de primer orden

$$yu_x + xu_y = 0,$$

con datos

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \\ u(0,y) &= g(y). \end{aligned}$$

f y g son conocidas, de clase C^1 y satisfacen $f(0) = g(0)$. Determina las curvas características y prueba que cualquier solución es constante a lo largo de las características. Usa este hecho para dar una fórmula explícita para la solución general en las regiones (i) $x = \pm y$, (ii) $y^2 - x^2 > 0$, y (iii) $x^2 - y^2 > 0$. Verifica que la solución satisface, en efecto, la ecuación y las condiciones iniciales, y que es continua en todo el plano.

7. Resuelve el problema con valores iniciales,

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 1, \\ u(x,0) &= -\tfrac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Encuentra las curvas características (haz un dibujo) y da una fórmula explícita para la solución. La solución encontrada, ¿existe para todo $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty)$?

8. Resuelve la ecuación lineal

$$xu_y - yu_x = u,$$

con condición inicial $u(x,0) = f(x)$, donde f es una función de clase C^1. ¿Dónde está definida la solución? Clasifica el conjunto de funciones f para las cuales existe una solución *global* de clase C^1 al problema.

9. Encuentra la solución a la siguiente ecuación cuasi-lineal de primer orden

$$u_x + u_y = u^4,$$

con datos iniciales $u(x,0) = x^2$. Resuelve el sistema característico asociado. Discute la invertibilidad del mapeo $(s,\xi) \mapsto (x,y)$, y la región de existencia de la solución encontrada.

10. Considera la ecuación

$$uu_x + yu_y = x,$$

y la curva inicial $\mathcal{I} = \{(\tilde{x},\tilde{y})(\xi) = (\xi,\xi) \,:\, \xi > 0\}$. Determina si para los siguientes datos iniciales existe una única solución de clase C^1, o no hay solución diferenciable, o bien existe una infinidad de soluciones de clase C^1:

(a) $u = 2\xi$ sobre $\mathcal{I}$.

(b) $u = \xi$ sobre $\mathcal{I}$.

(c) $u = \sin((\pi/2)\xi)$ sobre $\mathcal{I}$.

11. Considera el problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} yu_x + xu_y &= 0, \\ u(e^\xi, e^\xi) &= \tfrac{1}{2}\xi^2, \qquad \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Demuestra que no existe solución de clase C^1 en ninguna vecindad del punto $(1,1,0)$. (*Sugerencia:* ¿Se cumple la condición de colinealidad de $(a,b,c)^\top$ y $(\tilde{x}',\tilde{y}',f')^\top$ en un solo punto? ¿Se cumple la condición de transversalidad?)

12. Considera el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} uu_x + u_y &= 1, \\ u(\xi - \xi^2, \xi) &= \xi, \end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$. ¿Existe alguna solución de clase C^1 en una vecindad del punto $(2/9, 1/3, 1/3)$? Explica tu respuesta.

13. Resuelve la ecuación completamente no lineal,

$$xu_x + yu_y + u_x u_y - u = 0,$$

con condición $u(x,-x) = 1$. ¿Es la solución única? ¿Es global?

14. Considera la ecuación de Burgers

$$u_t + \left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \tag{1}$$

con condición inicial

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ 0, & -1 \le x \le 0, \\ 2 & 0 < x < 1, \\ 0, & x \ge 1. \end{cases}$$

Encuentra la única solución entrópica a este problema.

15. Considera el siguiente problema:

$$\rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$$\rho(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Encuentra una solución débil y entrópica para todo tiempo $t > 0$. Escribe la solución explícitamente. ¿Porqué es entrópica? (*Sugerencia:* Dado que la función de flujo es cóncava, las discontinuidades de $\rho(0,x)$ en $x = 0$ y en $x = 1$ dan lugar a una onda de choque y a una onda de rarefacción, respectivamente. Observa que el factor integrante de una ecuación de la forma $y'(t) + ay(t) = f$ es $\mu(t) = \exp(\int^t a(s)\,ds)$. Tendrás que resolver una ecuación de esta forma para la segunda onda de choque que se genera.) Interpreta la respuesta en términos de flujo de tráfico.

16. *Tráfico vehicular en un túnel.* Un modelo más realista para el flujo vehicular dentro de un túnel está descrito por la siguiente función de flujo:

$$Q(\rho) = \begin{cases} \rho u_{\max}, & 0 \le \rho \le \rho_c, \\ \rho\lambda \log\big(\rho_{\max}/\rho\big), & \rho_c \le \rho \le \rho_{\max}, \end{cases}$$

donde

$$\lambda = \frac{u_{\max}}{\log(\rho_{\max}/\rho_c)}.$$

Observa que Q es continua también en el valor de densidad crítica $\rho_c := \rho_{\max} e^{-u_{\max}/\lambda}$. Si $\rho \le \rho_c$ los conductores tienen la libertad de conducir a la velocidad máxima $u_{\max}$. Supongamos que la entrada del túnel está localizada en $x = 0$ y que los automóviles esperan (con densidad máxima $\rho_{\max}$) a la apertura del túnel a tiempo $t = 0$. De este modo, la condición inicial es

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_{\max}, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

(a) Determina la densidad y la velocidad de los automóviles para $t > 0$. Dibuja las gráficas como función del tiempo.

(b) Determina la trayectoria de un auto que inicialmente se encuentra en la posición $x = x_0 < 0$ y calcula el tiempo que le toma llegar a la entrada del túnel. Dibuja su trayectoria en el plano (x,t).

Total: 160 pts.