EDPs Posgrado 2016-II

Tarea 1 (soluciones)

1. (a) Multiplicando por $\exp(-\int_0^t \phi(s)ds)$ obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left(\exp\left(-\int_0^t \phi(s)\,ds\right)\eta(t)\right) \le \exp\left(-\int_0^t \phi(s)\,ds\right)\psi(t).$$

Integrando en $[0,t]$ obtenemos

$$\exp\left(-\int_0^t \phi(s)\,ds\right)\eta(t) - \eta(0) \le \int_0^t \underbrace{\exp\left(-\int_0^\tau \phi(s)ds\right)}_{\le 1}\psi(\tau)\,d\tau$$

$$\le \int_0^t \psi(s)\,ds,$$

es decir, $\eta(t) \le \exp\left(\int_0^t \phi(s)\,ds\right)\left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds\right)$.

(b) Sea $u = u(x,t)$ una solución. Multiplicando la ecuación diferencial por u,

$$uu_t + cuu_x = \partial_t\left(\tfrac{1}{2}u^2\right) + \partial_x\left(\tfrac{1}{2}cu^2\right) = uf$$

e integrando en $[0,R]$, obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^R u(x,t)^2\,dx + \frac{c}{2}\int_0^R \partial_x\left(u(x,t)^2\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^R u(x,t)^2\,dx + \frac{c}{2}\left(u(R,t)^2 - \underbrace{u(0,t)^2}_{=0}\right)$$

$$= \int_0^R uf\,dx \le \frac{1}{2}\int_0^R u(x,t)^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^R f(x,t)^2\,dx$$

Como $\frac{c}{2}u(R,t)^2 \ge 0$ concluimos que

$$\frac{d}{dt}\eta(t) \le \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

donde

$$\eta(t) = \frac{1}{2}\int_0^R u(x,t)^2\,dx \ge 0$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\int_0^R f(x,t)^2\,dx \ge 0$$

$$\cancel{\phi(t) = 1 \ge 0}$$

Nótese que $\eta(0) = 0$, ya que $u(x,0) = 0 \ \forall x \in [0,R]$.

Aplicando el lema de Gronwall se obtiene la estimación de estabilidad:

$$\int_0^R u(x,t)^2\,dx \le e^t \int_0^t \int_0^R f(x,s)^2\,dx\,ds.$$

2. ~~Las características son de la forma~~ $(x+sa, t+s)$ con $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,+\infty)$ fijo, $s \in \mathbb{R}$; si $u = u(x,t)$ es solución entonces sea $\tilde{u}(s) := u(x+sa, t+s)$. Así,

$$\frac{d\tilde{u}}{ds} = u_t(x+sa, t+s) + a \cdot \nabla \tilde{u}(x+sa, t+s) = -cu(x+sa, t+s)$$
$$= -c\tilde{u}(s).$$

Resolviendo: $\tilde{u}(s) = \tilde{u}(s_0) e^{-c(s-s_0)}$. Tomando $s=0$ y $s_0 = -t$ obtenemos $\tilde{u}(0) = u(x,t) = \tilde{u}(-t) e^{-ct} =$
$= u(x-ta, 0) e^{-ct} = f(x-ta) e^{-ct}$. La solución es una onda viajera "atenuada":

$$u(x,t) = f(x-ta) e^{-ct}$$

Comprobación:

- $u(x,0) = f(x)$
- $u_t + a \cdot \nabla u + cu = -c f(x-ta) e^{-ct} - a \cdot \nabla f(x-ta) e^{-ct}$
$$+ a \cdot \nabla f(x-ta) e^{-ct} + c f(x-ta) e^{-ct} \equiv 0$$

3. Problema: $\begin{cases} x u_x + y u_y = 2u \\ u(x,0) = x^2, \quad x > 0 \end{cases}$ Ecuación lineal de 1er. orden.

Aquí $a = x$, $b = y$, $c = 2u$; $\mathcal{L} = \{ (\xi, 0) : \xi > 0 \}$.
$u|_{\mathcal{L}} = f(\xi) = \xi^2$, $\mathcal{L}' = \{ (\xi, 0, \xi^2) : \xi > 0 \}$.

La condición de transversalidad no se cumple:

$$\det \begin{pmatrix} a & \tilde{x}'(\xi) \\ b & \tilde{y}'(\xi) \end{pmatrix}_{\mathcal{L}} = \det \begin{pmatrix} \xi & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall \xi > 0.$$

Sin embargo, los vectores $\begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \\ f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2\xi \end{pmatrix}$ y

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{L}'} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ 2\xi^2 \end{pmatrix}$ son colineales para todo $\xi > 0$.

Por el teorema visto en clase existe un número infinito de soluciones en cualquier vecindad de la curva $\mathcal{L}'$, con $\xi > 0$.

2/

sistema característico: $\frac{dx}{ds} = x$, $x(0) = \xi$; $\frac{dy}{ds} = y$, $y(0) = 0$; $\frac{du}{ds} = 2u$, $u(0) = \xi^2$. Solución: $x(s) = \xi e^s$, $y(s) \equiv 0$, $u(s) = \xi^2 e^{2s}$

$\therefore$ $u = x^2$. una solución es $u(x,y) = x^2$. Para hallar otra solución proponemos $u(x,y) = x^2 + \varphi(y)$.

$u(x,0) = x^2 \Rightarrow \varphi(0) = 0$. $xu_x + yu_y = 2u \Rightarrow y\varphi' = 2\varphi$.

Resolviendo: $\varphi(y) = y^2$. Así, $u(x,y) = x^2 + y^2$ es otra solución. Para hallar una familia proponemos una solución de la forma $u(x,y) = x^2 + y\psi(x)$, en virtud de que la curva inicial es $(x,0)$. Así, $u(x,0) = x^2$ para cualquier $\psi = \psi(x)$. $xu_x + yu_y = 2u \Rightarrow xy\psi' = y\psi$.

Tomando $y \neq 0$ obtenemos $x\psi' = \psi$. Resolvemos para obtener $\psi(x) = \alpha x$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ constante, arbitraria.

Así, una familia de soluciones es

$$u_\alpha(x,y) = x^2 + \alpha xy + y^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Comprobación: • $u_\alpha(x,0) = x^2$ ✓

• $x\partial_x u_\alpha + y\partial_y u_\alpha = 2x^2 + 2\alpha xy + 2y^2 = 2u$ ✓

$\boxed{4.}$ Nota: En este problema no se determinó que la familia genera a todas las soluciones C^1 globales (en todo $\mathbb{R}^2$) del problema.

Claramente la familia $u_\alpha = \alpha x + (1-\alpha)y$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, es una familia de soluciones de clase C^1, globales, al problema. Suponiendo que $w = w(x,y)$ es otra solución global de clase C^1, entonces $v = w - u_\alpha$ es solución de:

$$\left.\begin{aligned} xv_x + yv_y &= v \\ v(x,x) &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots (*)$$

$v \in C^1(\mathbb{R}^2)$, solución global de $(*)$

Claramente la condición de transversalidad no se cumple

$$\det\begin{pmatrix} a & \tilde{x}' \\ b & \tilde{y}' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \xi & 1 \\ \xi & 1 \end{pmatrix} \equiv 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

3/

Claramente $v(x,y) \equiv 0$ es una solución C^1, global de $(*)$.

los vectores $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathscr{L}} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \\ f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ son colineales para todo $z \neq 0$. Por el teorema visto en clase, existe un número infinito de soluciones de clase C^1 en cualquier vecindad de un punto $(z_0, z_0, 0)$ con $z_0 \neq 0$ al problema $(*)$. Sin embargo, $v = 0$ es la única solución C^1 también en $(0,0)$: si $v = v(x,y)$ es de clase C^1, global, entonces $v(0,0) = 0$. En coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ tenemos que $xv_x + yv_y = rv_r = v$ y $v|_{r=0} = 0$. La única solución es $v = \beta r$, con β constante. $v|_{r=0} = 0 \Rightarrow \beta \equiv 0$. Así, $v(x,y) \equiv 0$ es la única solución de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$ de $(*)$ y la familia u_α [illegible] contiene a todas las soluciones de clase C^1, globales, del problema original.

$\boxed{5.}$ Problema: $$\left.\begin{aligned} xu_x + yu_y &= 4u \\ u = 1 \quad &\text{sobre } x^2+y^2 = 1 \end{aligned}\right\} \cdots (5.1)$$

Aquí: $\mathscr{L} = \{(\cos z, \sin z) : z \in \mathbb{R}\}$ curva inicial, $u|_{\mathscr{L}} = f(z) = 1$. $a = x$, $b = y$, $c = 4u$. La condición de transversalidad, $\det\begin{pmatrix} a & \tilde{x}' \\ b & \tilde{y}' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos z & -\sin z \\ \sin z & \cos z \end{pmatrix} = 1 \ \forall z$.

Por el teorema, existe una única solución cerca de la curva inicial $\mathscr{L}' = \{(\cos z, \sin z, 1) : z \in \mathbb{R}\}$.

Sistema característico: $\frac{dx}{ds} = x$, $x(0) = \cos z$; $\frac{dy}{ds} = y$, $y(0) = \sin z$, $\frac{du}{ds} = 4u$, $u(0) = 1$ $\Rightarrow x = \cos z\, e^s$, $y = \sin z\, e^s$, $u = e^{4s}$

$\Rightarrow u = e^{4s} = (x^2+y^2)^2$. Solución: $u(x,y) = (x^2+y^2)^2$.

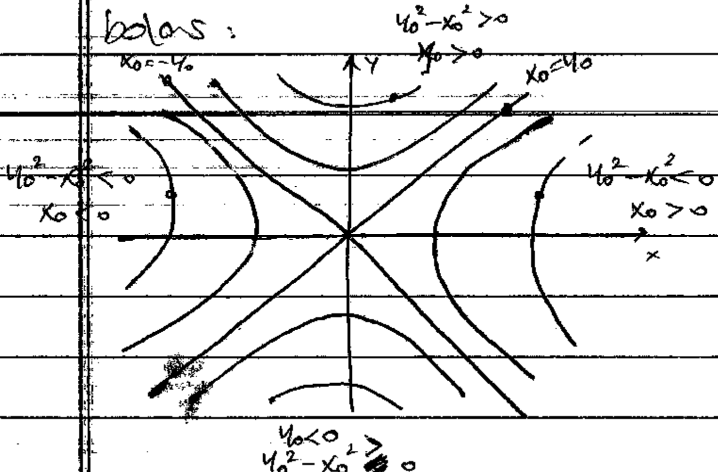
Solución de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$, global.

$\boxed{6.}$ ~~Problema:~~ $\left.\begin{array}{l} \cancel{y u_x + x u_y = 0} \\ u(x,0) = f(x) \\ \cancel{u(0,y)} = g(y) \end{array}\right\}$ (6.1) con $f(0)=g(0)$.

Curvas características: soluciones de $\frac{dx}{ds} = y$, $x(0) = x_0$

$\frac{dy}{ds} = x$, $y(0) = y_0$

con $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ arbitrario. Resolviendo se tiene:
$x(s) = ae^s - be^{-s}$, $y(s) = ae^s + be^{-s}$, a,b constantes, donde $a = \frac{1}{2}(x_0+y_0)$, $b = \frac{1}{2}(y_0-x_0)$. Claramente: $x+y = 2ae^s$, $x-y = 2be^{-s}$ por lo que $e^s = \frac{1}{2a}(x+y) = \frac{2b}{y-x}$, es decir, $-(x+y)(x-y) = 4ab = y_0^2 - x_0^2$. Las curvas características son hipérbolas:



$$y^2 - x^2 = y_0^2 - x_0^2$$

Si $x_0 = \pm y_0$, rectas que pasan por $(0,0)$.

~~Sobre las características~~ u es constante: sea $u(s) = u(x(s), y(s))$

$\therefore \frac{du}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_y \frac{dy}{ds} = y u_x + x u_y \equiv 0.$

$\Rightarrow u(s) = u(0) = u(x(0),y(0)) = u(x_0,y_0) \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

~~Para cada~~ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fijo tenemos los siguientes casos:

(a) $x = \pm y$: $u(x,y) = u(0,0)$ constante sobre ~~las rectas $x=\pm y$.~~ $u(x,y) = f(0) = g(0)$

(b) $y^2 - x^2 < 0$, características $y^2 - x^2 = y_0^2 - x_0^2$

Por (x,y) pasa una única hipérbola dependiendo del signo de x. Intersecta a $y=0$ en $z = \pm\sqrt{x^2-y^2}$

Así, $u(x,y) = u(z,0) = u(\pm\sqrt{x^2-y^2}, 0) = f(\pm\sqrt{x^2-y^2})$

5/ el signo es el signo de x, esto es:

$$~~u(x,y) = \begin{cases} f(\sqrt{x^2-y^2}) & \text{si } x^2-y^2>0,\ x>0 \\ f(-\sqrt{x^2-y^2}) & \text{si } x^2-y^2>0,\ x<0 \end{cases}~~$$

(c) $y^2-x^2>0$: Por cada (x,y) fijo pasa una sola hipérbola; depende del signo de y. Cruza por $x=0$ en el punto $(0,\eta)$ con $\eta = \pm\sqrt{y^2-x^2}$. el signo es el signo de y. Así,

$$u(x,y) = \begin{cases} g(\sqrt{y^2-x^2}) & \text{si } y^2-x^2>0,\ y>0 \\ g(-\sqrt{y^2-x^2}) & \text{si } y^2-x^2>0,\ y<0 \end{cases}$$

La solución completa es:

$$u(x,y) = \begin{cases} f(0)=g(0) & \text{si } x=\pm y \\ f(+\sqrt{x^2-y^2}) & \text{si } x^2-y^2>0,\ x>0 \\ f(-\sqrt{x^2-y^2}) & \text{si } x^2-y^2>0,\ x<0 \\ g(+\sqrt{y^2-x^2}) & \text{si } y^2-x^2>0,\ y>0 \\ g(-\sqrt{y^2-x^2}) & \text{si } y^2-x^2>0,\ y<0 \end{cases}$$

La solución es continua en todo $\mathbb{R}^2$ ya que

$$\lim_{|x|\to|y|} u(x,y) = \lim_{|x|\to|y|} f(\pm\sqrt{x^2-y^2}) = \lim_{|x|\to|y|} g(\pm\sqrt{x^2-y^2})$$

$$= f(0) = g(0).$$

En cada región abierta $x^2-y^2 \gtrless 0$, $x \gtrless 0$, $y \lessgtr 0$, u satisface la ecuación diferencial. Por ejemplo, si $u = f(-\sqrt{x^2-y^2})$ entonces $u_x = \frac{-2x}{\sqrt{x^2-y^2}} f'(-\sqrt{x^2-y^2})$

$~~u_y = \frac{2y}{\sqrt{x^2-y^2}} f'(-\sqrt{x^2-y^2}) \Rightarrow y u_x + x u_y = 0.~~$

Análogamente en las otras regiones. Claramente la solución ~~[illegible]~~ es de clase C^1 excepto en las rectas $x=\pm y$.

6/

$\boxed{7.}$ Problema de Cauchy: $\begin{cases} u_t + u u_x = 1 & x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0) = -\frac{1}{2}x & x\in\mathbb{R} \end{cases}$

Sistema característico: $\frac{d\hat{x}}{ds} = \hat{u}$, $\hat{x}(0) = \xi$; $\frac{d\hat{t}}{ds} = 1$, $\hat{t}(0) = 0$

$\frac{d\hat{u}}{ds} = 1$, $\hat{u}(0) = -\frac{1}{2}\xi$. La solución es: $\hat{u}(s) = s - \frac{1}{2}\xi$

$\hat{t}(s) = s$, $\hat{x}(s) = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s\xi + \xi$.

Banda característica:

$$\bar{x}(s,\xi) = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s\xi + \xi$$

$$\bar{t}(s,\xi) = s$$

$$\bar{u}(s,\xi) = s - \frac{1}{2}\xi$$

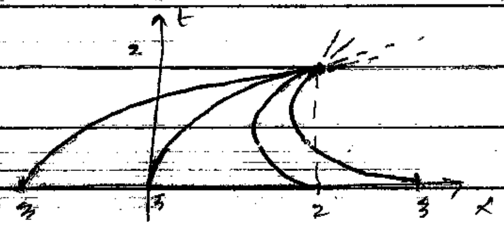
Condición de transversalidad: $\det\begin{pmatrix} \bar{x}_s & \bar{x}_\xi \\ \bar{t}_s & \bar{t}_\xi \end{pmatrix}_{|s=0} = \det\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\xi & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= -1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ hay una única solución de clase C^1 en una vecindad de $\mathcal{L} = \{(\xi,0) : \xi\in\mathbb{R}\}$, es decir, para $|t| \ll 1$ pequeño. Sin embargo, el mapeo $(s,\xi) \mapsto (\bar{x},\bar{t})$ no es invertible globalmente: $\det\begin{pmatrix} \bar{x}_s & \bar{x}_\xi \\ \bar{t}_s & \bar{t}_\xi \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} s-\frac{1}{2}\xi & 1-\frac{1}{2}s \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= 1 - \frac{1}{2}s \neq 0 \quad \text{ssi} \quad s \neq 2.$$

Los características son parábolas $x(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t\xi + \xi$, para cada $\xi\in\mathbb{R}$; todos pasan por el punto $(x,t) = (2,2)$: $\frac{1}{2}(2)^2 - \frac{1}{2}(2)\xi + \xi = 2$ para todo $\xi\in\mathbb{R}$.



Fórmula explícita para $u = u(x,t)$, si $0 \le t < 2$:

$$x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t\xi + \xi$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{2x - t^2}{2-t}$$

$\Rightarrow \bar{u}(s,\xi) = s - \frac{1}{2}\xi = t - \frac{2x-t^2}{2(2-t)} = (t-2)^{-1}\left(x + \frac{1}{2}t^2 - 2t\right)$.

$\therefore u(x,t) = (t-2)^{-1}\left(x + \frac{1}{2}t^2 - 2t\right)$ para $x\in\mathbb{R}$, $t\in[0,2)$.

Comprobación: • $u(x,0) = -\frac{1}{2}x$ ✓

• $u_x = (t-2)^{-1}$, $u_t = 1 - (t-2)^{-2}\left(x + \frac{1}{2}t^2 - 2t\right)$

7/ $\Rightarrow 1 - u u_x = 1 - (t-2)^{-2}\left(x + \frac{1}{2}t^2 - 2t\right) = u_t$ ✓ ok.

La solución existe sólo en $\mathbb{R}\times[0,2)$.

~~3.~~ ~~Prob de Cauchy: $xu_y - yu_x = u$~~

$u(x,0) = f(x)$ } $\cdots (*)$

$f \in C^1(\mathbb{R})$, curva inicial $R' = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, f)(\xi) = (\xi, 0, f(\xi))\}$.

$a = -y,\ b = x,\ c = u$. Cond. de transversalidad:

$\begin{vmatrix} a & \tilde{x}' \\ b & \tilde{y}' \end{vmatrix}_{R'} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \xi & 0 \end{vmatrix} = \xi \neq 0$. Se cumple sólo si $\xi \neq 0$.

Sistema característico: $\frac{dx}{ds} = -y,\ x(0) = \xi$

$\frac{dy}{ds} = x,\ y(0) = 0$

$\frac{du}{ds} = u,\ u(0) = \xi$

Solución: $u(s) = f(\xi)e^{s}$, $x(s) = \xi \cos s$, $y(s) = \xi \sin s$.

Así, $x^2 + y^2 = \xi^2$, $\tan s = y/x$

$\Rightarrow \xi = \pm\sqrt{x^2+y^2}$, $s = \operatorname{Arc\,tan}(y/x)$.

$\operatorname{Arc\,tan}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Así, $u = f(\pm\sqrt{x^2+y^2})e^{\operatorname{Arc\,tan}(y/x)}$

Depende del signo de x. Si $x > 0$,

$u = f(\sqrt{x^2+y^2})e^{\operatorname{Arc\,tan}(y/x)} = u(x,y)$

$u(x,0) = f(\sqrt{x^2})e^{\operatorname{Arc\,tan}(0)} = f(|x|) = f(x)$ ✓

Si $x < 0$, $u(x,0) = f(-\sqrt{x^2})e^{\operatorname{Arc\,tan}(0)} = f(-|x|) = f(x)$

En $(0,0)$, $u(0,0) = f(0)$, ya que $f(|x|) \to f(0)$

$f(-|x|) \to f(0)$

si $|x| \to 0$.

La solución es:

$$u(x,y) = \begin{cases} f(\sqrt{x^2+y^2})e^{\operatorname{Arc\,tan}(y/x)}, & x > 0 \\ f(-\sqrt{x^2+y^2})e^{\operatorname{Arc\,tan}(y/x)}, & x < 0 \end{cases}$$

~~con $u(0,0) = f(0)$. para~~ cualquier $f \in C^1(\mathbb{R})$

la solución está definida sólo en las regiones $\{x>0\}$, $\{x<0\}$ y en $(0,0)$.

La solución no está (en general) definida en $(0,y)$ con $y \neq 0$. Los límites pueden ser diferentes cuando $x \to 0^+$, $x \to 0^-$.

8/

~~Por ejemplo, si $f(x) = x \in C^\infty(\mathbb{R})$, tenemos para $y>0$ fijo:~~

$$\lim_{x\to 0^+} u(x,y) = \lim_{x\to 0^+} f(\sqrt{x^2+y^2})\, e^{\operatorname{Arc\,tan}(y/x)} = f(|y|)\, e^{\pi/2} = y e^{\pi/2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} u(x,y) = \lim_{x\to 0^-} f(-\sqrt{x^2+y^2})\, e^{\operatorname{Arc\,tan}(y/x)} = f(-|y|)\, e^{-\pi/2} = -y e^{-\pi/2}.$$

Si $f\in C^1$ y la solución es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$, por continuidad debemos tener $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x,y) = \lim\limits_{x\to 0^-} u(x,y)$

Sea $y>0$: entonces

$$\lim_{x\to 0^+} u(x,y) = \lim_{x\to 0^+} f(\sqrt{x^2+y^2})\, e^{\operatorname{Arc\,tan}(y/x)} = f(y)\, e^{\pi/2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} u(x,y) = \lim_{x\to 0^-} f(-\sqrt{x^2+y^2})\, e^{\operatorname{Arc\,tan}(y/x)} = f(-y)\, e^{-\pi/2}$$

Por continuidad: $f(y) = f(-y)e^{-\pi}$ para todo $y>0$.

Análogamente, $f(y) = f(-y)e^{-\pi}$ para todo $y<0$.

Así, $f(y) = f(-y)e^{-\pi} = f(y)e^{-2\pi}$ si $y>0$

$f(y) = f(-y)e^{-\pi} = f(y)e^{-2\pi}$ si $y<0$

$\Rightarrow f(y) = 0$ si $y\neq 0$. Como $f\in C^1$ se tiene $f(0)=0$. $\therefore$ la única función $f\in C^1$ que produce soluciones globales de clase C^1 es $f(x) = 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\boxed{9.}$ Ec. cuasi-lineal:

$$\left.\begin{aligned} u_x + u_y &= u^4 \\ u(x,0) &= x^2 \end{aligned}\right\}$$

Aquí, $a=1$, $b=1$, $c=u^4$, $\Gamma' = \{(\hat{x},\hat{y},t)(\xi) = (\xi, 0, \xi^2)\}$.

cond. transversalidad: $\begin{vmatrix} a & \hat{x}' \\ b & \hat{y}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

Existe una única solución de clase C^1 en una vecindad de Γ', para cada $\xi\in\mathbb{R}$.

Sist. característico: $\dfrac{dx}{ds} = 1$, $x(0) = \xi$; $\dfrac{dy}{ds} = 1$, $y(0)=0$

9/ $\Rightarrow x(s) = s+\xi$, $y(s) = s$. $\dfrac{du}{ds} = u^4$, $u(0) = \xi^2$.

$\frac{du}{u^4} = ds \Rightarrow u^3 = -\frac{1}{3(s+c)}$, con C const.

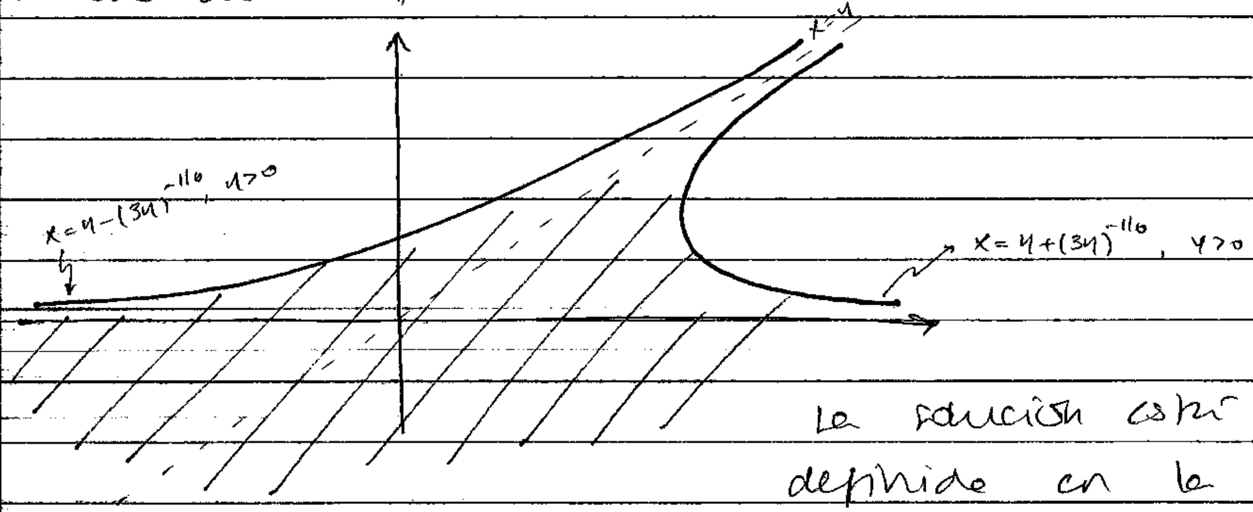
Como $u(0) = z^2$ tenemos $u^3 = -\frac{1}{3s - \frac{1}{z^6}} = \frac{z^6}{1-3sz^6}$

$\Rightarrow \bar{u}(s,z) = \frac{z^2}{(1-3sz^6)^{1/3}}$. Sustituyendo $z = x-y$, $s = y$

obtenemos la solución $u(x,y) = \frac{(x-y)^2}{(1-3y(x-y)^6)^{1/3}}$.

Claramente $u(x,0) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. También se puede verificar que $u_x + u_y = u^4$ (¡háganlo!).

Claramente, si $y \leq 0$ entonces $1-3y(x-y)^6 > 0$. La solución está definida para todo el semiplano $y \leq 0$. El denominador se hace cero en las curvas $x = y \pm (3y)^{-1/6}$, con $y>0$. Graficando ambas curvas tenemos:



La solución está definida en la región sombreada es decir:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\} \cup$$

dominio

$$\cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y>0, \begin{array}{l} x > y-(3y)^{-1/6} \\ x < y+(3y)^{-1/6} \end{array} \right\}.$$

Región abierta.

10/

10. ~~Ecuación $uu_x + yu_y = x$~~, $\mathcal{L} = \{(\xi,\xi) : \xi > 0\}$.

(a) $u = 2\xi$ sobre $\mathcal{L}$. Cond. de transversalidad:

$a = u$, $b = y$, $c = x$ $\quad f(\xi) = 2\xi$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & \tilde{x}' \\ b & \tilde{y}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & \tilde{x}' \\ \tilde{y} & \tilde{y}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\xi & 1 \\ \xi & 1 \end{vmatrix} = \xi \neq 0. \quad (\xi > 0).$$

Existe una única solución en una vecindad de $\mathcal{L}$ con $\xi > 0$. Sistema característico:

$\frac{dx}{ds} = u$, $x(0) = \xi$, $\quad \frac{dy}{ds} = y$, $y(0) = \xi$, $\quad \frac{du}{ds} = x$, $u(0) = 2\xi$

$\Rightarrow y(s) = \xi e^s$, $\quad \frac{d^2x}{ds^2} = x \quad \therefore \quad x(s) = ae^s + be^{-s}$

$u(s) = ae^s - be^{-s}$

$x(0) = \xi$, $u(0) = 2\xi \Rightarrow a = \frac{3}{2}\xi$, $b = -\frac{1}{2}\xi$.

$\Rightarrow x(s) = \frac{1}{2}\xi(3e^s - e^{-s})$, $\quad u(s) = \frac{1}{2}\xi(3e^s + e^{-s})$.

$\therefore u = \frac{3}{2}\xi e^s + \frac{\xi}{2}e^{-s} = \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}y - x = 3y - x$.

Solución (única): $u(x,y) = 3y - x$.

(b) $u = \xi$ sobre $\mathcal{L}$. Como $f(\xi) = \xi$, la cond. de transversalidad es $\Delta = \begin{vmatrix} \xi & 1 \\ \xi & 1 \end{vmatrix} \equiv 0 \quad \forall \xi > 0$.

Los vectores $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} f \\ \tilde{y} \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \\ \xi \end{pmatrix}$, y

$\begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \\ f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son colineales para todo $\xi > 0$.

Por el teorema visto en clase, existe un número infinito de soluciones de clase C^1 en cualquier vecindad de $P_0 = (\xi_0, \xi_0, \xi_0)$, con $\xi_0 > 0$.

Algunas de ellas son $u(x,y) = x$

$u(x,y) = 2y - x$, por ejemplo.

11/

(c) $u = \sin(\frac{\pi}{2}\xi)$ $f(\xi)$ sobre I cond. de transversalidad $\Delta = \begin{vmatrix} \sin(\frac{\pi}{2}\xi) & 1 \\ \xi & 1 \end{vmatrix} = \sin(\frac{\pi}{2}\xi) - \xi$

$\Delta = 0 \iff \xi = 1 > 0$. Si $\xi \neq 0$ entonces existe una única solución de clase C^1 en una vecindad de cualquier punto $(\xi_0, \xi_0, \sin(\frac{\pi}{2}\xi_0))$ con $\xi_0 > 0$, $\xi_0 \neq 1$. En $\xi_0 = 1$, sin embargo, los vectores

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{|\xi_0=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \\ f' \end{pmatrix}_{|\xi_0=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

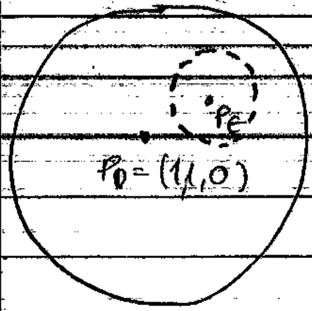
no son colineales. Por el teorema visto en clase no existe solución de clase C^1 en ninguna vecindad del punto $(1,1,1)$.

$\boxed{11.}$ Problema:
$$\left.\begin{aligned} y u_x + x u_y &= 0 \\ u(e^x, e^x) &= \tfrac{1}{2}x^2, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\}.$$

Aquí $a = y$, $b = x$, $c = 0$. $I = \{(e^\xi, e^\xi) : \xi \in \mathbb{R}\}$
$f(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2$, $u|_I = f(\xi)$ cond. de transversalidad:
$$\Delta = \begin{vmatrix} a & \tilde{x}' \\ b & \tilde{y}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^\xi & e^\xi \\ e^\xi & e^\xi \end{vmatrix} = 0 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}.$$

colinealidad: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{|I} = \begin{pmatrix} e^\xi \\ e^\xi \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \\ f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\xi \\ e^\xi \\ \xi \end{pmatrix}$

son colineales en un sólo punto: $\xi = 0$.
No podemos aplicar ningún teorema general.
Por contradicción: supongamos que existe una solución de clase C^1 en una vecindad del punto $P_0 = (1,1,0)$, con $\xi_0 = 0$. Entonces, para $1 \gg \epsilon > 0$ suficientemente pequeño, existe una solución de clase C^1 en una vecindad (más pequeña) del punto $P_\epsilon = (e^\epsilon, e^\epsilon, \frac{1}{2}\epsilon^2)$



~~Pero eso es falso~~: los vectores

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\Bigg|_{P_\varepsilon} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \\ f' \end{pmatrix}\Bigg|_{P_\varepsilon} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

no son colineales si $\varepsilon > 0$.

Por el teorema visto en clase esto implica que no existe solución de clase C^1 en ninguna vecindad de P_ε. Concluimos que no existe solución de clase C^1 en ninguna vecindad de $P_0 = (1,1,0)$.

$\boxed{12.}$ Problema:
$$\left.\begin{aligned} u u_x + u_y &= 1 \\ u(z-z^2, z) &= z, \quad z \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\}$$

$P_0 = \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. $a = u$, $b = 1$, $c = 1$, $f(z) = z$.

cond. de transversalidad:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & \tilde{x}' \\ b & \tilde{y}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & 1-2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3z - 1 = 0 \text{ en } z_0 = \tfrac{1}{3}.$$

Los vectores $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \\ f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2z \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

son colineales en un solo punto: $z_0 = \frac{1}{3}$.

$\therefore$ no podemos aplicar ningún teorema general.

Sin embargo sí hay solución de clase C^1:

$u(x,y) = y$ es solución global del problema.

$\boxed{13.}$ Problema:
$$x u_x + y u_y + u_x u_y - u = 0$$
$$u(x,-x) = 1$$

Aquí: $\mathcal{L} = \{(z,-z) : z \in \mathbb{R}\}$, $u|_{\mathcal{L}} = f(z) = 1$.

$$F(x,y,u,p,q) = xp + yq + pq - u.$$

~~sistema característico:~~

$\frac{dx}{ds} = F_p = x + q, \quad x(0) = \xi \quad ; \quad \frac{dy}{ds} = F_q = y + p, \quad y(0) = -\xi$

$\frac{du}{ds} = pF_p + qF_q = px + qy + 2pq, \quad u(0) = 1$

$\frac{dp}{ds} = -(F_x + pF_u) = 0, \quad p(0) = p_0 \; ; \; \frac{dq}{ds} = -(F_y + qF_u) = 0, \quad q(0) = q_0$

donde (p_0, q_0) es solución de:

$$\begin{cases} F(\tilde{x}, \tilde{y}, f, p_0, q_0) = \xi(p_0 - q_0) + p_0 q_0 - 1 = 0 \\ \tilde{x}' p_0 + \tilde{y}' q_0 - f' = p_0 - q_0 = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad p_0 = q_0, \quad p_0^2 = 1$. Hay dos soluciones:

(i) $(p_0, q_0) = (1,1)$; (ii) $(p_0, q_0) = (-1,-1)$.

caso (i): $(p_0, q_0) = (1,1) \Rightarrow p(s) = p_0 = 1, \quad q(s) = q_0 = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \frac{dx}{ds} = x + 1, \quad x(0) = \xi \\ \frac{dy}{ds} = y + 1, \quad y(0) = -\xi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x(s) = (1+\xi)e^s - 1 \\ y(s) = (1-\xi)e^s - 1 \end{array}$$

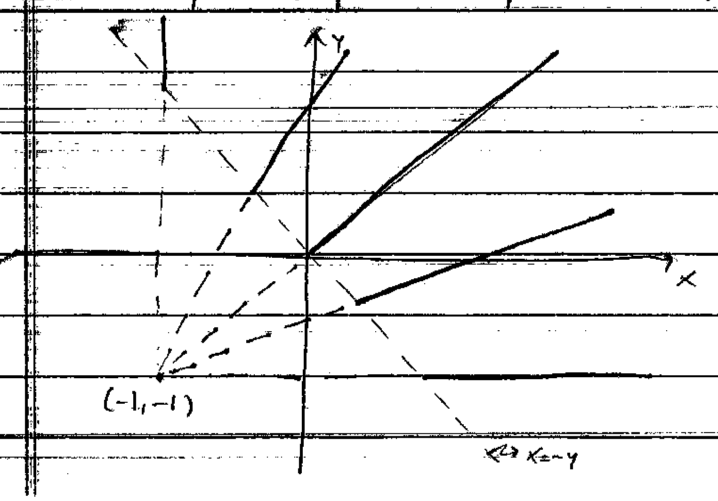
$\Rightarrow \frac{du}{ds} = x + y + 2 = 2e^s, \quad u(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad u(s) = 2e^s - 1$.

Mapeo: $(s, \xi) \mapsto (x, y)$. $\begin{vmatrix} x_s & x_\xi \\ y_s & y_\xi \end{vmatrix} = -e^{2s} \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

Los características son rectas con pendiente $\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)$.

$\frac{y+1}{x+1} = \frac{(1+\xi)e^s}{(1-\xi)e^s} \Rightarrow y = \left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)(x+1) - 1$.

Todos pasan por el punto $(-1,-1)$, $\forall \xi$ fijo



Despejando:

$x + y = 2e^s - 2 = u - 1$

$\Rightarrow$ solución:

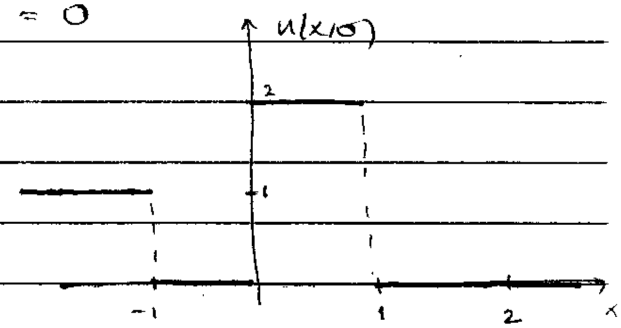
$u(x,y) = x + y + 1$.

caso (ii): análogamente, si tomamos $(p_0, q_0) = (-1,-1)$ uno obtiene $u(x,y) = 1-(x+y)$, también es solución.

Ambas soluciones son globales (definidas en todo $\mathbb{R}^2$) pero claramente no hay unicidad.

$\boxed{14}$ Ec. de Burgers: $u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ 2, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$



La condición inicial tiene saltos "entrópicos" (con $u_L > u_R$) en $x=-1$ y $x=1$. Así se generan dos ondas de choque: una emana de $x=-1$ y la otra de $x=1$, con velocidades

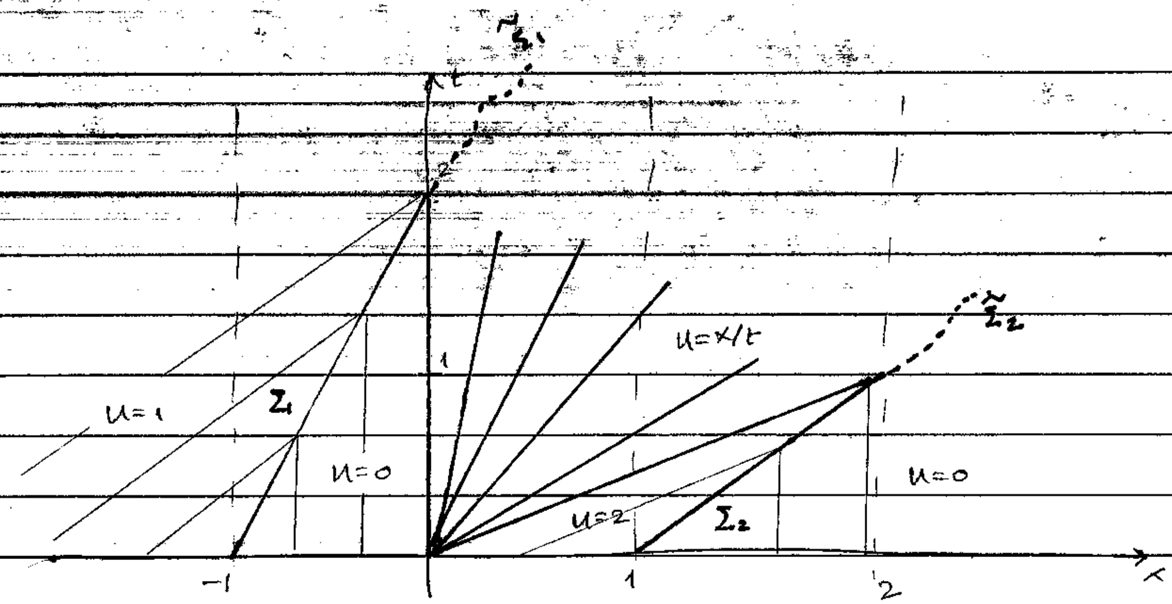
$$s_1 = \frac{\frac{1}{2}(0)^2 - \frac{1}{2}(1)^2}{0-1} = \frac{1}{2}, \quad y \quad s_2 = \frac{\frac{1}{2}(2)^2 - \frac{1}{2}(0)^2}{2-0} = 1,$$

respectivamente. Ondas de choque:

$$\Sigma_1 = \{ \hat{x}_1(t) = \tfrac{1}{2}(t-2), \ t \in [0, T_1) \} \quad \text{pasa por } (-1,0)$$
$$\Sigma_2 = \{ \hat{x}_2(t) = t+1, \ t \in [0, T_2) \} \quad \text{pasa por } (1,0)$$

$T_1, T_2 > 0$ están por determinarse. En $(0,0)$ hay un salto con $0 = u_L < u_R = 2$, por lo que ahí se genera una onda de rarefacción. Por ser $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ (Burgers), u en el sector $0 < x < \frac{1}{2}t$ (esta última es la característica que pasa por $(0,0)$) tiene pendiente $\frac{1}{2}$; es decir, $u=2$ es constante, e

15/ intersecta a la onda de choque Σ_2 en $(2,1)$ (ver dibujo).



Las características con pendiente $\frac{1}{2}$ que provienen de la condición inicial $u=2$ en $0<x<1$ están acotadas por Σ_2 por la derecha y la característica $x=2t$ a la izquierda. Se intersectan en $(2,1)$, por lo que Σ_2 existe sólo si $0\leq t<1$ y $T_2=1$. Para $t\geq 1$, Σ_2 se prolonga en forma de una discontinuidad que llamaremos $\tilde{\Sigma}_2$.

La onda de choque Σ_1 intersecta la característica $x=0$ en $(0,2)$. De este modo $T_1=2$. Para $t\geq 2$, Σ_1 continúa como una discontinuidad $\tilde{\Sigma}_1$. Para calcular $\tilde{\Sigma}_1$ y $\tilde{\Sigma}_2$ usamos Rankine-Hugoniot. Sobre $\tilde{\Sigma}_1=\{\xi_1(t) : t\geq T_1\}$, tenemos $u_L=1$, $u_R=\xi_1(t)/t$, ya que a la derecha tenemos la onda de rarefacción. Así,

$[u]=\dfrac{\xi_1}{t}-1$, $[f(u)]=\left(\dfrac{\xi_1^2}{t^2}-1\right)/2$; por la condición de Rankine-Hugoniot tenemos: $\dfrac{d\xi_1}{dt}\left(\dfrac{\xi_1}{t}-1\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\xi_1^2}{t^2}-1\right)$, con $\xi_1(2)=0$. Es decir,

$$\frac{d\xi_1}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{\xi_1}{t}+1\right), \qquad \xi_1(2)=0$$

16/ La solución es $\xi_1(t)=t-\sqrt{2t}$, $t\geq 2$.

~~Así, $\tilde{\Sigma}_1 = \{ (\xi_1(t), t) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty) : \xi_1 = t - \sqrt{2t}, t \geq 2 \}$.~~

~~Análogamente, sobre $\tilde{\Sigma}_2$ tenemos $u_L = \xi_2(t)/t$,~~

~~$u_R = 0$, por lo que $[u] = -\frac{\xi_2}{t}$, $[f] = -\xi_2^2/(2t^2)$.~~

La ecuación es

$$\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\xi_2}{t}, \qquad \xi_2(1) = 2.$$

La solución es $\xi_2(t) = 2\sqrt{t}$ y $\tilde{\Sigma}_2 = \{ (\xi_2, t) : \xi_2 = 2\sqrt{t}, t \geq 1 \}$

Ambas discontinuidades satisfacen la condición de entropía de Lax:

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}} = \frac{\xi_1(t)}{t} = u_R = f'(u_R) < \frac{d\xi_1}{dt} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2t}} < f'(u_L) = u_L \equiv 1. \quad t \geq 2$$

$$0 = u_R = f'(u_R) < \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{1}{\sqrt{t}} < f'(u_L) = u_L = \frac{\xi_2(t)}{t} = \frac{2}{\sqrt{t}}, \quad t \geq 1$$

Notemos que $\tilde{\Sigma}_2$ y $\tilde{\Sigma}_1$ se intersectan a un tiempo $t = T_3 > 2$. En efecto, $T_3 = (2+\sqrt{2})^2 > 6$ y el punto de intersección es $(x_3, T_3) = (2\sqrt{T_3}, T_3) = (2(2+\sqrt{2}), (2+\sqrt{2})^2)$. Así, $\tilde{\Sigma}_1$ y $\tilde{\Sigma}_2$ se colapsan en una nueva onda de choque $\tilde{\Sigma}_3$ con $u_L = 1$, $u_R = 0$ y su velocidad es $s_3 = \frac{1}{2}$. Además pasa por (x_3, T_3).

$\therefore \xi_3(t) = \frac{1}{2}(t - T_3) + x_3$. Definimos las regiones:

$R_1 = \{ x < \frac{1}{2}(t-2),\ 0 \leq t < 2 \} \cup \{ x < t - \sqrt{2t},\ 2 < t < (2+\sqrt{2})^2 \} \cup \{ x < \frac{1}{2}(t - (2+\sqrt{2})^2) + 2(2+\sqrt{2});\ t > (2+\sqrt{2})^2 \}$

$R_2 = \{ \frac{1}{2}(t-2) < x < 0;\ 0 \leq t < 2 \} \cup \{ t+1 < x;\ 0 \leq t < 1 \} \cup \{ 2\sqrt{2} < x;\ 1 < t < (2+\sqrt{2})^2 \} \cup \{ x > \frac{1}{2}(t - (2+\sqrt{2})^2) + 2(2+\sqrt{2}),$ ~~$t > (2+\sqrt{2})^2$~~ $\}$

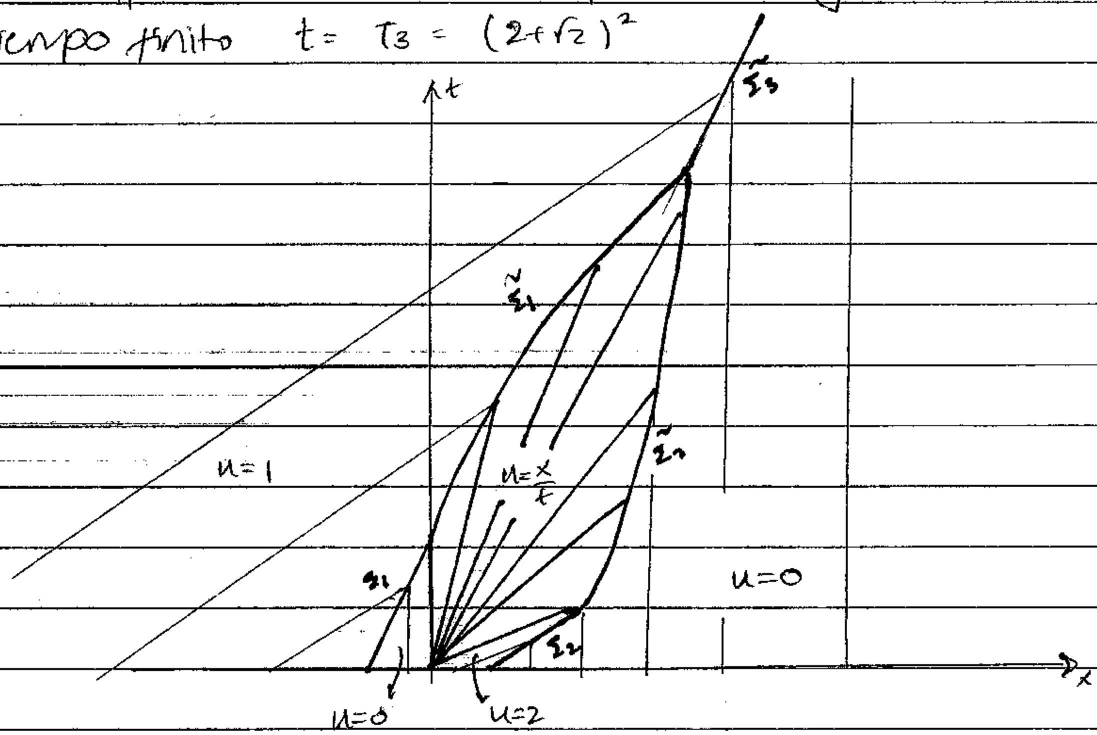
$R_3 = \{ 2t < x < 1;\ 0 < t \leq 1 \}$

$R_4 = \{ \max(0, \xi_1(t)) < x < \min(2t, \xi_2(t)),\ 0 \leq t \leq (2+\sqrt{2})^2 \}$

~~La solución entrópica, explícita, es~~

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & (x,t) \in R_1 \\ 0, & (x,t) \in R_2 \\ 2, & (x,t) \in R_3 \\ x/t, & (x,t) \in R_4 \end{cases}$$

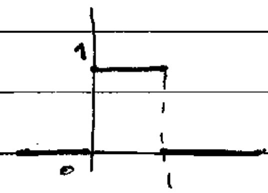
Nótese que la onda de rarefacción deja de existir a tiempo finito $t = T_3 = (2+\sqrt{2})^2$



15.

$$\rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0$$

$$\rho(x,0) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 0 \end{cases}$$



Función de flujo: $Q(\rho) = \rho(1-\rho)$, estrictamente cóncava. ~~$Q(0) = Q(1) = 0$. Velocidad característica~~: $a(\rho) = Q'(\rho) = 1-2\rho$.

El salto en $x=0$ es entrópico. $\rho_R = 1 > \rho_L = 0$ (Q cóncava). En $(0,0)$ se genera una onda de choque con velocidad $s_1 = [Q]/[\rho] = \frac{Q(1)-Q(0)}{1-0} = 0$.

La onda de choque es estacionaria, $s_1 = 0$, tiene la forma $\Sigma_1 = \{ x = \hat{x}_1(t) = 0 \; ; \; t \geq 0, \; t < T_1 \}$.

~~En la región $a(-1) = -1 \le \rho \le a(0) = 1$~~, $a(\rho)$ es invertible con inversa $g(\rho) = a^{-1}(\rho) = \frac{1}{2}(1-\rho)$. El salto en $x=1$ genera una onda de rarefacción centrada en $(1,0)$, dada por $\rho(x,t) = g\left(\frac{x-1}{t}\right) = \frac{1}{2t}(t-x+1)$, definida en la región $-1 \le (x-1)/t \le 1$ para $t>0$.

Sin embargo, la característica $x(t) = -t+1$, que limita a la onda de rarefacción por la derecha, intersecta a la onda de choque Σ_1 en $t=1$. Para $t \geq 1 = T_1$ el choque se "curvea" debido a la acción de la rarefacción y continúa en forma de discontinuidad $\tilde{\Sigma}_1 = \{\xi_1(t), t\}$.

Para calcular ξ_1, usamos Rankine-Hugoniot, $\rho_L = 0$, $\rho_R = g((\xi_1(t)-1)/t)$. Así,

$$Q(\rho_R) = Q\left(g((\xi_1(t)-1)/t\right) = Q\left((t-\xi_1+1)/2t\right)$$
$$= \frac{1}{4t^2}(t-\xi_1+1)(t+\xi_1-1)$$

Rankine-Hugoniot:

$$S = \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{[Q]}{[\rho]} = \frac{Q(g(\xi_1(t)-1)/t))}{g((\xi_1-1)/t)} = \frac{1}{2t}(t+\xi_1-1),$$

con $\xi_1(1) = 0$. Tenemos:

$$\frac{d\xi_1}{dt} - \frac{1}{2t}\xi_1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t}\right), \quad \xi_1(1) = 0.$$

Factor integrante: $1/\sqrt{t}$; resolviendo tenemos

$t^{-1/2}\xi_1 = t^{1/2} + t^{-1/2} + C$; como $\xi_1(1) = 0$ la solución es

$$\tilde{\Sigma}_1 = \{(\xi_1, t) : \xi_1(t) = t+1-2\sqrt{t} \; ; \; t \geq 1\}.$$

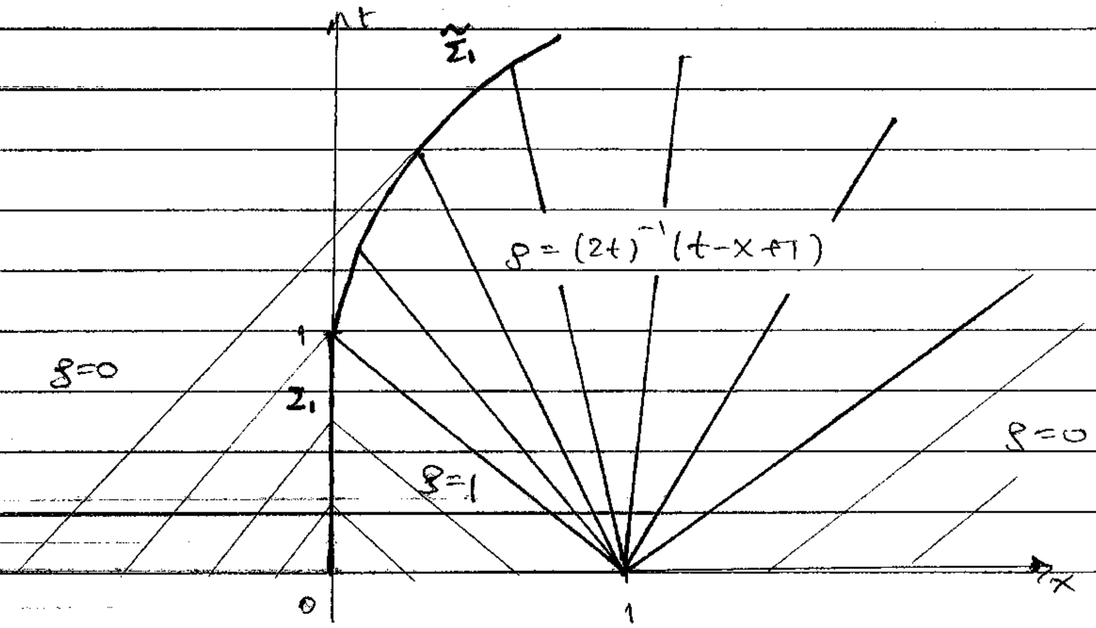
Para $t \geq 1$, $\tilde{\Sigma}_1$ nunca intersecta la otra característica que limita a la onda de rarefacción $x(t) = 1+t$.

La solución está dada por:

49/ $$\rho(t,x) = \begin{cases} 0, & x<0, \text{ ó } x \geq 1+t \\ 1, & 0<x<1-t \\ (2t)^{-1}(t-x+1), & 1-t \le x \le 1+t \end{cases} \quad \text{si } 0<t<1$$

~~Y~~ por $\rho(x,t) = \begin{cases} 0 & x < t+1-2\sqrt{t}, \text{ó } x \geq 1+t \\ (2t)^{-1}(t-x+1) & t+1-2\sqrt{t} \leq x \leq 1+t \end{cases}$

si $t \geq 1$. (ver dibujo)



La solución es entrópica. Satisface la condición de Lax:

En Σ_1: $a(\rho_R) = a(1) = -1 < s_1 = 0 < a(\rho_L) = 1$ $t \leq 1$

En $\tilde{\Sigma}_1$: $a(\rho_R) = \frac{1}{t}(\xi_1(t)-1) = 1 - \frac{2}{\sqrt{t}} < s = \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{1}{2t}(t+\xi_1-1)$

$= 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} < a(\rho_L) = a(0) = 1$

$t \geq 1$.

Interpretación: tenemos una cuadra (block), que tiene ~~dos bocacalles en $x=0$ y $x=1$.~~ Para $t<0$, hay densidad máxima de autos, mientras que en los extremos el tráfico está bloqueado por policías que dejan cruzar gente. Para tiempo $t=0$, ambas bocacalles se desbloquean. Los coches que llegan a $x=0$ a tiempo $t=0$ empiezan a tomar un

~~onda de choque estacionaria,~~ que se propaga con veloci-dad $\dot{s}_1 = 0$. Los coches que estaban en $x=1$ comienzan a moverse continuamente (rarefacción). Después de un tiempo positivo ($T=1$), la onda de choque comienza a moverse con velocidad positiva, no constante, $ds_1/dt > 0$, en dirección de la calle, pero nunca alcanza a los autos que estaban en $x=1$ a tiempo $t=0$.

$\boxed{16.}$

$$Q(\rho) = \begin{cases} \rho u_{max} & , \quad 0 \le \rho < \rho_c \\ \rho \lambda \log(\rho_{max}/\rho) & , \quad \rho_c \le \rho \le \rho_{max} \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{u_{max}}{\log(\rho_{max}/\rho_c)} \quad , \quad \rho_c = \rho_{max} e^{-u_{max}/\lambda}$$

Si $\rho \le \rho_c$, los conductores van con velocidad u_{max}.

Ver solución en Salsa-Verzini.