LECCIÓN 3: HIPERBOLICIDAD Y EJEMPLOS

RAMÓN G. PLAZA

1.7. **Hiperbolicidad.** En el caso de una ecuación escalar lineal de la forma

$$u_t + au_x = 0,$$

vimos que ésta admitía una solución (de hecho, *la* solución) en forma de onda viajera

$$u(x,t) = u_0(x - at),$$

donde u_0 es la condición inicial. Igualmente, podemos preguntarnos bajo qué condiciones un sistema nolineal de leyes de conservación de la forma

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0, \tag{1}$$

admite soluciones en forma de onda viajera. Nos interesa que la solución sea de clase C^1 fuera de una discontinuidad, por lo que podemos asumir que u es una solución suave. De este modo se debe cumplir que

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} Df^j(u) u_{x_j} = 0, \tag{2}$$

donde $Df^j(u) : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ denota la matriz jacobiana de f^j con respecto de u, es decir,

$$Df^j(u) = \begin{pmatrix} \partial_{u_1} f_1^j(u) & \cdots & \partial_{u_n} f_1^j(u) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{u_1} f_n^j(u) & \cdots & \partial_{u_n} f_n^j(u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Supongamos que existen soluciones a (1) en forma de onda viajera, es decir,

$$u(x,t) = \bar{u}(x\cdot\xi - st), \tag{3}$$

donde $\bar{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una función continuamente diferenciable en una variable, $\xi \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, es la dirección de propagación de la onda, y $s \in \mathbb{R}$ es la velocidad de propagación. Sustituyendo en el sistema cuasi-lineal (2) obtenemos

$$-s\bar{u}'(x\cdot\xi - st) + \sum_{j=1}^{d} \xi_j Df^j(\bar{u}(x\cdot\xi - st))\bar{u}'(x\cdot\xi - st) = 0. \tag{4}$$

Definamos la matriz

$$A(u,\xi) := \sum_{j=1}^{d} \xi_j Df^j(u). \tag{5}$$

Date: 28 de febrero, 2008.

La ecuación (4) sugiere que $\bar{u}'$ debe ser un vector propio de la matriz $A(\bar{u},\xi)$ con valor propio s. En otras palabras, para tener velocidades reales de propagación, los valores propios de $A(u,\xi)$ deben ser reales.

Definición 1.1. El sistema de leyes de conservación (1) es llamado *hiperbólico* si para toda $u \in \Omega$, y todo $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\xi \neq 0$, la matriz $A(u,\xi)$ definida en (5) tiene valores propios reales, que denotamos como

$$\lambda_1(u,\xi) \leq \ldots \leq \lambda_n(u,\xi).$$

Si los valores propios son, además, todos distintos, entonces decimos que el sistema es *estrictamente hiperbólico*.

Observación 1.2. 1. Si el sistema es estrictamente hiperbólico, existen vectores propios $r_1(u,\xi),\ldots,r_n(u,\xi) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ que generan todo $\mathbb{R}^n$ y satisfacen

$$A(u,\xi)r_j(u,\xi) = \lambda_j(u,\xi)r_j(u,\xi),$$

para toda $1 \leq j \leq n$, y todo $u \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^d, \xi \neq 0$.
2. Dado que toda matriz real y su adjunta tienen el mismo espectro, introducimos los vectores propios *izquierdos*, $l_j(u,\xi) \in \mathbb{R}^{1\times n}$, tales que,

$$l_j(u,\xi)A(u,\xi) = \lambda_j(u,\xi)l_j(u,\xi),$$

para toda $1 \leq j \leq n$, y todo $u \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^d, \xi \neq 0$.
3. Si el sistema es estrictamente hiperbólico entonces

$$l_k(u,\xi)r_j(u,\xi) = 0, \quad \text{si } k \neq j,$$

ya que

$$\lambda_k(l_k r_j) = l_k A r_j = l_k \lambda_j r_j = \lambda_j(l_k r_j),$$

implica que $(\lambda_k - \lambda_j)l_k r_j = 0$, o simplemente, $l_k r_j = 0$, si $k \neq j$. Igualmente tenemos que

$$l_j(u,\xi)r_j(u,\xi) \neq 0,$$

para toda u,ξ y j.
4. Los valores propios $\lambda_j(u,\xi)$ de un sistema hiperbólico son llamados también *velocidades características* del sistema en el estado $u \in \Omega$ en dirección $\xi \in \mathbb{R}^d$.

La siguiente proposición garantiza que la hiperbolicidad es invariante bajo cambios suaves de coordenadas.

Proposición 1.3. *Sea $u \in \Omega$ una solución de clase C^1 del sistema hiperbólico* (1)*. Sea $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo suave (es decir, una función inyectiva y sobre, con derivadas continuas), con inversa Φ^{-1}. Entonces,*

$$w := \Phi(u),$$

satisface el sistema hiperbólico cuasi-lineal

$$w_t + \sum_{j=1}^{d} \tilde{A}^j(w) w_{x_j} = 0, \tag{6}$$

en $\mathbb{R}^d \times [0,+\infty)$, donde

$$\tilde{A}^j(w) := D_u\Phi(\Phi^{-1}(w))A^j(\Phi^{-1}(w))D_w\Phi^{-1}(w),$$
$$A^j(u) := D_u f^j(u),$$

para toda $u \in \Omega$, $w \in \Phi(\Omega)$.

Prueba. Dado que u es solución C^1 de (1), tenemos que

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} A^j(u) u_{x_j} = 0.$$

Φ es invertible y suave. Por lo tanto, si $w = \Phi(u)$ entonces

$$u_t = D_w \Phi^{-1}(w) w_t,$$
$$u_{x_j} = D_w \Phi^{-1}(w) w_{x_j},$$

y por ende,

$$D_w \Phi^{-1}(w) w_t + \sum_{j=1} A^j(\Phi^{-1}(w)) D_w \Phi^{-1}(w) w_{x_j} = 0.$$

Dado que $(D_w \Phi^{-1}(w))^{-1} = D_u \Phi(\Phi^{-1}(w))$, multiplicando la ecuación anterior por $D_u \Phi(\Phi^{-1}(w))$ obtenemos (6). Para verificar que (6) es también un sistema hiperbólico basta con hacer notar que las matrices $A(u,\xi)$ y

$$\tilde{A}(w,\xi) = \sum_{j=1}^{d} \xi_j \tilde{A}^j(w),$$

son similares, dado que $\tilde{A}(\Phi(u),\xi) = D_u \Phi(u) A(u,\xi) (D_u \Phi(u,\xi))^{-1}$, y por lo tanto tienen el mismo espectro. Los valores propios de $\tilde{A}(w,\xi)$ están dados por $\lambda_j(\Phi^{-1}(w),\xi)$, donde $\lambda_j(u,\xi)$ denota un valor propio de $A(u,\xi)$. Por lo tanto el sistema (6) es también hiperbólico.

□

Observación 1.4. Esta proposición resulta ser muy útil. En muchos casos es más fácil verificar hiperbolicidad de un sistema cuasi-lineal equivalente, que hacerlo directamente, como veremos en algunos ejemplos más adelante.

1.7.1. *Sistemas simétricos.*

Definición 1.5. El sistema (1) es *simétrico* si las matrices jacobianas de los flujos son simétricas,

$$Df^j(u)^\top = Df^j(u), \qquad j = 1, \dots, d, \tag{7}$$

para toda $u \in \Omega$.

Definición 1.6. El sistema (1) es *simetrizable* si para toda $u \in \Omega$ existe una matriz real $S(u)$ definida positiva, simétrica (y por ende, invertible), tal que las matrices

$$\hat{A}^j(u) := S(u) Df^j(u), \qquad j = 1, \dots, d,$$

son simétricas. La matriz $S(u)$ se denomina un *simetrizador* del sistema (1).

Lema 1.7. *Si el sistema* (1) *es simetrizable entonces es hiperbólico.*

Prueba. Supongamos que (1) es simetrizable con simetrizador $S(u)$. Denotemos

$$A^j(u) := Df^j(u),$$
$$\hat{A}(u,\xi) := S(u) A(u,\xi)$$
$$A(u,\xi) := \sum_{j=1}^{d} \xi_j A^j(u),$$

para $u \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^d$. De esta forma, $\hat{A}$ es una matriz real y simétrica; por lo tanto, sus valores propios son reales. Dado que $S(u)$ es definida positiva, real y simétrica, tenemos que $w^* S(u) w > 0$ para todo $w \in \mathbb{C}^n$, $w \neq 0$. Sea $w \in \mathbb{C}^n$ un vector propio de A con valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$. Entonces tenemos que $Aw = S^{-1}\hat{A}w = \lambda w$, o bien,

$$\hat{A}w = \lambda S w.$$

Sea $r := w^* S w > 0$. Entonces,

$$\lambda r = w^*(\lambda S w) = w^* \hat{A} w = w^* \hat{A}^\top w = (\hat{A}w)^* w = (\lambda S w)^* w = \lambda^* w^* S^\top w = \lambda^* w^* S w = \lambda^* r.$$

Dado que $r \neq 0$ tenemos que $\lambda = \lambda^*$, esto es, $\lambda \in \mathbb{R}$. Así $A(\xi, u) = S(u)^{-1}\hat{A}(u,\xi)$ tiene valores propios reales y el sistema es hiperbólico.

□

Observación 1.8. Si el simetrizador $S(u)$ es un difeomorfismo (es decir, es un simetrizador suave), la hiperbolicidad es automática por la Proposición 1.3. La conclusión del lema es, por lo tanto, más general.

1.8. **Ejemplos de sistemas hiperbólicos.**

1.8.1. *Ecuaciones escalares.* Toda ecuación escalar

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0,$$

donde cada flujo $f^j : \Omega \to \mathbb{R}^1$ es una función escalar y $u \in \mathbb{R}$, es hiperbólica. Aquí existe una única velocidad característica real dada por

$$\lambda(u,\xi) = \sum_{j=1}^{d} \xi_j f^{j\prime}(u).$$

1.8.2. *El sistema p.* Recordemos sistemas de la forma

$$\begin{aligned} v_t - w_x &= 0, \\ w_t + p(v)_x &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

donde $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función nolineal dada, que satisface $p'(v) < 0$, $p''(v) > 0$, y donde $v, w \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$, llamados sistemas p. La función de flujo es

$$f(u) = \begin{pmatrix} -w \\ p(v) \end{pmatrix}$$

donde $u = (v, w)$ son las variables de estado. Su matriz jacobiana está dada por

$$Df(u) = A(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(v) & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente

$$\det(A(u) - \lambda I) = \lambda^2 + p'(v) = 0,$$

por lo que los valores propios son

$$\begin{aligned} \lambda_1(v,w) &:= -\sqrt{-p'(v)} < 0, \\ \lambda_2(v,w) &:= +\sqrt{-p'(v)} > 0. \end{aligned}$$

Dado que $p'(v) > 0$, los valores propios son reales, distintos, y el sistema es estrictamente hiperbólico. Es fácil comprobar que los vectores propios de A están dados por

$$r_1(v,w) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-p'(v)} \end{pmatrix}, \qquad r_2(v,w) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{-p'(v)} \end{pmatrix},$$

respectivamente. Los vectores propios izquierdos son simplemente $l_1 = r_1^\top$, $l_2 = r_2^\top$.

1.8.3. *Ecuaciones de Euler en una dimensión.* El sistema de ecuaciones de Euler para un gas compresible en una dimensión,

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_x &= 0, \\ (\rho E)_t + (\rho E v + p v)_x &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

donde ρ, v y e denotan densidad, velocidad y energía interna, y $E = e + \frac{1}{2}v^2$ y $p = \hat{p}(\rho, e)$, también es un sistema hiperbólico si se cumplen ciertas hipótesis sobre la función de estado del gas. Vamos a suponer que la función $\hat{p}$ satisface:

$$\hat{p} > 0, \tag{10}$$

$$\hat{p}_\rho > 0, \tag{11}$$

$$\hat{p}_e > 0. \tag{12}$$

Vamos a aplicar la Proposición 1.3 y verificar la hiperbolicidad de (9) probando que un sistema cuasilineal (equivalente para soluciones clásicas) es hiperbólico[1]. Después de algunas substituciones, es posible escribir (9) como el sistema cuasi-lineal equivalente

$$\begin{aligned} \rho_t + v\rho_x + \rho v_x &= 0, \\ v_t + v v_x + \frac{p_x}{\rho} &= 0, \\ e_t + v e_x + \frac{p v_x}{\rho} &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

donde

$$p_x = \hat{p}_\rho \rho_x + \hat{p}_e e_x.$$

El sistema (13) tiene la forma

$$U_t + A(U)U_x = 0,$$

donde

$$U := \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ e \end{pmatrix}, \qquad \text{y} \qquad A(U) := \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho}\hat{p}_\rho & v & \frac{1}{\rho}\hat{p}_e \\ 0 & \frac{1}{\rho}\hat{p} & v \end{pmatrix}.$$

En consecuencia tenemos que

$$\begin{aligned} \det(A(U) - \lambda I) &= (v - \lambda)\left((v-\lambda)^2 - \rho^{-2}\hat{p}_e\hat{p}\right) - \hat{p}_\rho(v - \lambda) \\ &= (v - \lambda)\left((v-\lambda)^2 - \rho^{-2}\hat{p}_e\hat{p} - \hat{p}_\rho\right). \end{aligned}$$

Denotemos

$$c^2 := \rho^{-2}\hat{p}_e\hat{p} + \hat{p}_\rho > 0,$$

positivo dadas (10)-(12). A la cantidad c se le conoce como *velocidad del sonido*. De este modo los valores propios de $A(U)$, o velocidades características del sistema, son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= v - c, \\ \lambda_2 &= v, \\ \lambda_3 &= v + c, \end{aligned}$$

[1] Invitamos al lector a probar hiperbolicidad de (9) directamente.

por lo cual el sistema es estrictamente hiperbólico.

Observación. Un ejemplo de ecuación de estado que satisface (10)-(12) es el de un gas ideal y politrópico. La presión termodinámica de un gas ideal está dada por

$$p = R\rho\theta,$$

donde $R > 0$ es una constante y θ es la temperatura. Si el volumen del gas es constante, el aumento en la energía interna es proporcional al aumento en la temperatura, por lo que

$$\frac{de}{d\theta} = c_v > 0.$$

La cantidad c_v es el calor específico a volumen constante. Si la presión se mantiene constante y el gas se expande mientras se añade energía, parte de la energía hace trabajo en la expansión, y la otra parte contribuye al aumento en energía interna. Por lo tanto,

$$\frac{d(e + p/\rho)}{d\theta} = c_p,$$

donde $d(p/\rho)$ es el trabajo de expansión del gas. La cantidad c_p es el calor específico a presión constante. Para un gas politrópico se asume que c_v y c_p son constantes, por lo que

$$e = c_v\theta, \qquad e + \frac{p}{\rho} = c_p\theta.$$

Se define así la razón γ de calores específicos como

$$\gamma := \frac{c_p}{c_v} > 1,$$

constante y mayor que 1, para gases politrópicos. De este modo, sustituyendo la ecuación de estado tenemos que

$$e = c_v\theta = c_p\theta/\gamma = (e + p/\rho)/\gamma.$$

Resolviendo para p obtenemos

$$p = \hat{p}(e, \rho) := (\gamma - 1)\rho e. \tag{14}$$

Claramente $\hat{p}$ satisface (10)-(12) ya que $\gamma > 1$. Una ecuación de estado de este tipo es llamada una *ley gama* para un gas politrópico (ver [2]).

1.8.4. *Materiales hiperelásticos.* Como tercer ejemplo consideremos el sistema que modela la dinámica de un material hiperelástico, a saber,

$$\begin{aligned} U_t - \nabla_x V &= 0, \\ V_t - \mathrm{div}_x \sigma(U) &= 0, \end{aligned} \tag{15}$$

donde U es el gradiente de deformación, $U = \nabla_x X \in \mathbb{R}^{3\times 3}_+$ y V es la velocidad local, $V = X_t \in \mathbb{R}^3$, del movimiento $X = X(x, t)$, y donde,

$$\sigma(U) := \frac{\partial W}{\partial U} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

es el primer tensor de stress de Piola-Kirchoff, definido componente a componente como

$$\sigma(U)_{ij} = \frac{\partial W}{\partial U_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

y $W = W(U)$ es la densidad de energía interna del material. Como hemos visto, si denotamos U_j como la columna j de U, y σ_j como la columna j de σ, las cantidades conservadas son

$$u = (U_1, U_2, U_3, V)^\top \in \mathbb{R}^{12},$$

con flujos,

$$f^1(u) = (V,0,0,\sigma_1(U))^\top, \quad f^2(u) = (0,V,0,\sigma_2(U))^\top, \quad f^3(u) = (0,0,V,\sigma_3(U))^\top,$$

y donde $f^j \in \mathbb{R}^{12}$ para toda $j = 1,2,3$. Para cada par de índices $1 \le i, j \le 3$, i, j fijos, definimos a las matrices $B_i^j(U) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ componente a componente como

$$(B_i^j(U))_{lk} := \frac{\partial^2 W}{\partial U_{lj}\partial_{ki}},$$

para cada $1 \le l, k \le 3$, es decir,

$$B_i^j(U) = \begin{pmatrix} W_{U_{1j}U_{1i}} & W_{U_{1j}U_{2i}} & W_{U_{1j}U_{3i}} \\ W_{U_{2j}U_{1i}} & W_{U_{2j}U_{2i}} & W_{U_{2j}U_{3i}} \\ W_{U_{3j}U_{1i}} & W_{U_{3j}U_{2i}} & W_{U_{3j}U_{3i}} \end{pmatrix}.$$

Es posible demostrar que las matrices jacobianas

$$A^j(u) = Df^j(u) \in \mathbb{R}^{12\times 12}, \quad j = 1,2,3,$$

están dadas por

$$A^1(U) = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1^1(U) & B_2^1(U) & B_3^1(U) & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2(U) = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1^2(U) & B_2^2(U) & B_3^2(U) & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3(U) = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ B_1^3(U) & B_2^3(U) & B_3^3(U) & 0 \end{pmatrix},$$

donde cada bloque es un bloque de 3×3, e I denota a la matriz identidad de 3×3.

Definimos ahora el *tensor acústico*,

$$N(\xi, U) := \sum_{i,j=1}^{3} \xi_i \xi_j B_i^j(U) \quad \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}^3$ y cada $U \in \mathbb{R}_+^{3\times 3}$.

Definición 1.9. Decimos que la función de densidad de energía W satisface la *condición de Legendre-Hadamard* (ver [1]) en U si el tensor acústico es definido positivo para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\xi \neq 0$, es decir, si

$$\eta^\top N(\xi, U)\eta > 0,$$

para todo $\eta \in \mathbb{R}^3$, $\eta \neq 0$, y todo $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\xi \neq 0$.

Lema 1.10. *Si W satisface la condición de Legendre-Hadamard en un estado $U \in \mathbb{R}_+^{3\times 3}$ entonces el sistema* (15) *es hiperbólico en U.*

Proof. Para cada $\xi \in \mathbb{R}^3$, sea

$$A(\xi, U) := \sum_{j=1}^{3} \xi_j A^j(U).$$

Por inspección en las expresiones de $A^j(U)$, notamos que éstas tienen un bloque de ceros de dimensión 9×9 y ceros en la diagonal. Por ende, $\lambda = 0$ es necesariamente un valor propio de A. Supongamos, por lo tanto, que $\lambda \neq 0$ es un valor propio de A, es decir,

$$A(\xi, U) \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

para cierto $(\tilde{U}, \tilde{V})^\top := (\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_3, \tilde{V})^\top \in \mathbb{R}^{12}$. Haciendo las multiplicaciones vemos que

$$A^1(U) \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{V} \\ 0 \\ 0 \\ -\sum_{i=1}^3 B_i^1(U)\tilde{U}_i \end{pmatrix},$$

$$A^2(U) \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{V} \\ 0 \\ -\sum_{i=1}^3 B_i^2(U)\tilde{U}_i \end{pmatrix},$$

$$A^3(U) \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tilde{V} \\ -\sum_{i=1}^3 B_i^3(U)\tilde{U}_i \end{pmatrix},$$

por lo que la ecuación espectral (16) se puede escribir como

$$\begin{aligned} &\xi_i \tilde{V} + \lambda \tilde{U}_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \\ &\sum_{i,j=1}^{3} \xi_j B_i^j(U)\tilde{U}_i + \lambda \tilde{V} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Multiplicando la segunda ecuación de (17) por $\lambda \neq 0$ y sustituyendo la primera obtenemos

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \xi_j \xi_i B_i^j(U)\tilde{V} + \lambda^2 \tilde{V} = 0,$$

lo que implica que

$$N(\xi, U)\tilde{V} = \lambda^2 \tilde{V},$$

es decir, λ^2 es un valor propio del tensor acústico, con vector propio $\tilde{V}$. Dado que W satisface la condición de Legendre-Hadamard, los valores propios de $N(\xi, U)$ son todos reales y estrictamente positivos, por lo que

$$\lambda = \pm\sqrt{\kappa},$$

donde $\kappa > 0$ es un valor propio de $N(\xi, U)$. De este modo los valores propios de A son

$$\lambda_0(\xi, U) = 0,$$

con multiplicidad algebraica 6, y 6 valores propios reales

$$\lambda_j^+(\xi, U) := +\sqrt{\kappa_j} > 0,$$
$$\lambda_j^-(\xi, U) := -\sqrt{\kappa_j} < 0,$$

para $j = 1, 2, 3$, donde κ_j son los valores propios de $N(\xi, U)$. □

Notemos que el sistema (15) es, por lo tanto, hiperbólico, pero no estrictamente hiperbólico, ya que tenemos 6 valores propios múltiples en $\lambda_0 = 0$.

1.8.5. *Otros sistemas.* Los sistemas hiperbólicos de leyes de conservación abundan en la literatura. Véanse los textos de Smoller [5], Serre [4] y Dafermos [3]. Como ejemplos adicionales consideremos los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1.11. Considera el sistema

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \tag{18}$$

$$v_t + (\tfrac{1}{2} v^2)_x = 0, . \tag{19}$$

Prueba que la matriz jacobiana tiene valores propios $\lambda_1 = \lambda_2 = v$ y un espacio unidimensional de vectores propios proporcional a $r = (v, 0)^\top \in \mathbb{R}^2$. Deduce que la matriz jacobiana no es diagonalizable y que el sistema es hiperbólico pero no estrictamente hiperbólico.

Ejercicio 1.12. Verifica que el sistema de ecuaciones para *agua poco profunda* en una dimensión espacial,

$$\begin{aligned} &\eta_t + (v\eta)_x = 0, \\ &v_t + (\tfrac{1}{2} v^2 + \eta)_x = 0, \qquad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty), \end{aligned} \tag{20}$$

donde $v \in \mathbb{R}$ es la velocidad horizontal del agua, y $\eta = gh \in \mathbb{R}$ con g la constante de gravedad y h la altura del agua, es estrictamente hiperbólico si $\eta > 0$.

BIBLIOGRAFÍA

[1] P. G. CIARLET, *Mathematical elasticity. Vol. I: Three-dimensional elasticity*, vol. 20 of Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988.

[2] R. COURANT AND K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Wiley Interscience, New York, 1948.

[3] C. M. DAFERMOS, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, vol. 325 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin, second ed., 2005.

[4] D. SERRE, *Systems of Conservation Laws 1: Hyperbolicity, entropies, shock waves*, Cambridge University Press, 1999.

[5] J. SMOLLER, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York, Second ed., 1994.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y MECÁNICA, IIMAS-UNAM, APDO. POSTAL 20-726, C.P. 01000 MÉXICO D.F. (MÉXICO)

E-mail address: `plaza@mym.iimas.unam.mx`