

LECCIÓN 2: GENERALIDADES. SOLUCIONES DÉBILES, CONDICIONES DE SALTO Y (NO) UNICIDAD

RAMÓN G. PLAZA

Como vimos en el ejemplo anterior de la ecuación de Burgers no viscosa, la no linealidad de las ecuaciones provoca que aún con condiciones iniciales suaves, una solución clásica pueda no existir para todo tiempo. Si permitimos soluciones discontinuas, éste fenómeno se asocia a la *formación de choques*. Por lo tanto, tenemos que extender nuestro concepto de solución.

1.4. Soluciones débiles. Consideremos el problema de Cauchy para un sistema de leyes de conservación,

$$u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} = 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0, \quad (2)$$

en $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$, $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f^j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supongamos que u es una solución clásica, es decir, de clase C^1 . Tomemos una *función de prueba*

$$\phi \in C_0^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n),$$

es decir, ϕ es la restricción de una función de clase C^1 con soporte compacto en un conjunto abierto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Ver Figura 1.

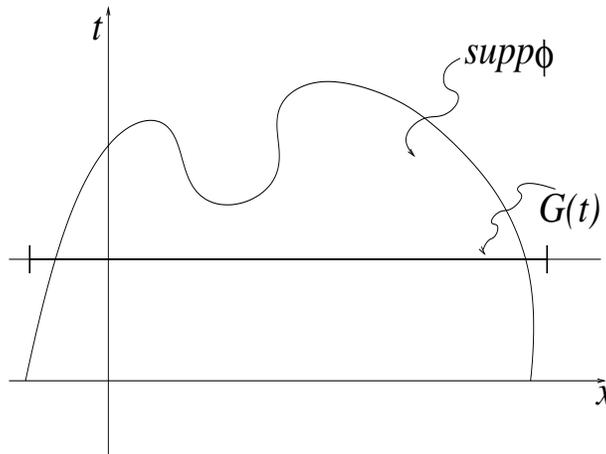


FIGURA 1. Función de prueba ϕ con soporte compacto que intersecta a $\{t \geq 0\}$ dentro de la curva en la figura. $G(t)$ es un subconjunto de \mathbb{R}^d para t fijo que contiene al soporte de ϕ para t fijo.

Multiplicando (1) por ϕ , e integrando tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_t \cdot \phi + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} \cdot \phi \, dx \, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (u \cdot \phi)_t + \sum_{j=1}^d (f^j(u) \cdot \phi)_{x_j} \, dx \, dt - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u \cdot \phi_t + \sum_{j=1}^d f^j(u) \cdot \phi_{x_j} \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Sea $G(t) \subset \mathbb{R}^d$, abierto y acotado para $t > 0$ fijo, tal que $\text{supp } \phi \cap \{t = \text{constante}\} \subset G(t)$, y por ende, $\phi = 0$ sobre la frontera $\partial G(t)$. Entonces, por el teorema de la divergencia tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^d} (u \cdot \phi) \Big|_{t=0}^{t=+\infty} dx + \int_0^{+\infty} \int_{\partial G(t)} \begin{pmatrix} f^1(u) \cdot \phi \\ \vdots \\ f^d(u) \cdot \phi \end{pmatrix} \cdot \hat{n} \, dS_x \, dt + \\ &\quad - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u \cdot \phi_t + \sum_{j=1}^d f^j(u) \cdot \phi_{x_j} \, dx \, dt. \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, 0) \cdot u_0(x) \, dx - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u \cdot \phi_t + \sum_{j=1}^d f^j(u) \cdot \phi_{x_j} \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto llegamos a la relación integral

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u \cdot \phi_t + \sum_{j=1}^d f^j(u) \cdot \phi_{x_j} \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, 0) \cdot u_0(x) \, dx = 0. \quad (3)$$

Definición 1.1. Una función¹ $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, +\infty); \Omega)$ es una solución débil de (1)-(2) si u satisface (3) para toda función de prueba $\phi \in C_0^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$.

Observación 1.2. 1. Por construcción, toda solución clásica es débil. Inversamente, si escogemos $\phi \in C_0^\infty$ y u es solución débil, entonces u satisface (3) en sentido de distribuciones.

2. Si tomamos ϕ con soporte contenido en un conjunto abierto $\mathcal{O} \subset \{t \geq t_0 > 0\}$ (es decir, lejos de $t = 0$), entonces

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u \cdot \phi_t + \sum_{j=1}^d f^j(u) \cdot \phi_{x_j} \, dx \, dt = 0. \quad (4)$$

3. Si u es solución débil de clase C^1 en alguna región abierta $R \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$, entonces es una solución clásica en R . En efecto, tomando cualquier $\phi \in C_0^1$ con soporte en

¹Aquí L^∞ denota el espacio de funciones esencialmente acotadas. En general, si X es un espacio vectorial, \mathcal{M} es una σ -álgebra y μ una medida, el espacio $L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ se define como

$$L^\infty = \{f : \|f\|_\infty < +\infty\},$$

$$\|f\|_\infty := \inf\{s_f(E) : E \in \mathcal{M}, \mu(E) = 0\},$$

$$s_f(E) := \sup\{|f(x)| : x \notin E\}.$$

Ver cualquier libro de Análisis Real (por ejemplo, [1]). En este curso basta con pensar en L^∞ como el espacio de funciones medibles acotadas.

$\{t > 0\} \cap R$ como en el punto anterior tenemos, integrando por partes (4), que

$$\int_R \phi \cdot u_t + \phi \cdot \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} dx dt = 0,$$

lo que implica que

$$u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} = 0,$$

se cumple puntualmente en R .

4. Si ahora tomamos una solución débil, de clase C^1 y consideramos $R = \mathbb{R}^d \times (0, +\infty)$, multiplicando la ecuación anterior por cualquier $\phi \in C_0^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, es decir, por una función general de prueba, tenemos al integrar por partes,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j}) \cdot \phi dx dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, 0) \cdot u(x, 0) dx - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} u \cdot \phi_t + \sum_{j=1}^d f^j(u) \cdot \phi_{x_j} dx dt. \end{aligned}$$

Comparando con (3) tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, 0) \cdot (u(x, 0) - u_0(x)) dx = 0,$$

para toda $\phi \in C_0^1$, por lo que $u(x, 0) = u_0(x)$ a.e. en \mathbb{R}^d , y la condición inicial se satisface puntualmente a.e. Por lo tanto, *la noción de solución débil extiende la noción de solución clásica*.

5. Nuestra definición de soluciones débiles admite soluciones *discontinuas*. Por ejemplo, podemos considerar soluciones que sean C^1 por pedazos, es decir, que exista un número finito de discontinuidades (en este caso, hipersuperficies en el espacio (x, t)), Σ_k , $k = 1, \dots, N$, fuera de las cuales u es de clase C^1 y u es discontinua a través de cada superficie Σ_k . Sin embargo, no toda discontinuidad es admisible, como veremos a continuación.

1.5. Relaciones de salto de Rankine-Hugoniot. Existe una relación (sobre la discontinuidad) entre u y el flujo $F(u)$ escondida en las ecuaciones. Asumamos que u es una solución que es C^1 por pedazos, y sea Σ una discontinuidad, es decir, una hipersuperficie (en el espacio-tiempo $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$) orientable de la forma

$$\Sigma = \{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ : \psi(x, t) = 0\},$$

con normal $\hat{n} = (n_1, \dots, n_d, n_t)^\top \in \mathbb{R}^{d+1}$, $|\hat{n}| = 1$. Por ejemplo, si Σ está definida por una función ψ como arriba, entonces las componentes espacial, $\hat{n}_x = (n_1, \dots, n_d)^\top$ y temporal \hat{n}_t de $\hat{n} = (\hat{n}_x, \hat{n}_t)^\top$ están dadas por

$$\hat{n}_x = \frac{\nabla_x \psi}{\sqrt{|\nabla_x \psi|^2 + \psi_t^2}}, \quad \hat{n}_t = \frac{\psi_t}{\sqrt{|\nabla_x \psi|^2 + \psi_t^2}}.$$

La hipersuperficie divide el espacio-tiempo en dos regiones y asumimos por convención que \hat{n} apunta en la dirección “derecha” de la superficie. Ver figura 2.

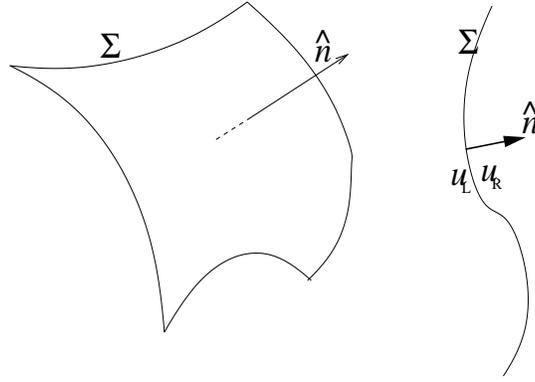


FIGURA 2. Hipersuperficie Σ en el espacio (x, t) ; \hat{n} es la normal unitaria a Σ que por convención apunta al lado “derecho” de la frontera.

Definamos para cada (x, t) en Σ ,

$$\begin{aligned} u_R &:= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} u((x, t) + \epsilon \hat{n}), \\ u_L &:= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} u((x, t) - \epsilon \hat{n}), \end{aligned} \quad (5)$$

como los valores a cada lado (derecho e izquierdo, respectivamente) de la frontera. Sea un punto $P \in \Sigma$ y consideremos una bola D centrada en P con radio pequeño, de manera que u es C^1 fuera de $\Sigma \cap D$ y D está lejos de $\{t = 0\}$. Sean D_R y D_L dos componentes de D a cada lado de la frontera Σ , tales que $D = D_L \cup D_R$. Ver Figura 3.

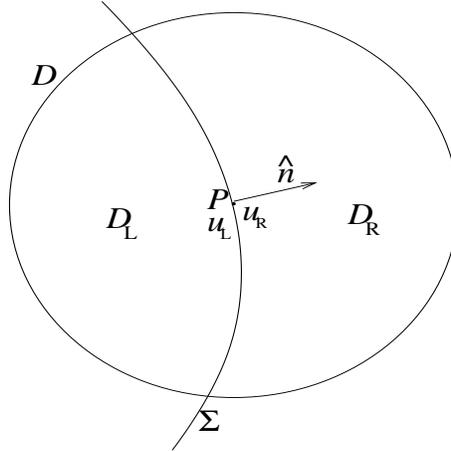


FIGURA 3. Bola D con centro en P sobre la frontera Σ . La normal unitaria apunta en la dirección “derecha”. $D = D_R \cup D_L$ donde D_R y D_L denotan las componentes derecha e izquierda de D respectivamente.

Sea $\phi \in C_0^1(D)$, de manera que si u es solución débil, entonces, por la fórmula (4) tenemos que

$$\int_{D_L \cup D_R} u \cdot \phi_t + \sum f^j(u) \cdot \phi_{x_j} dx dt = 0.$$

Dado que u es de clase C^1 en el interior de D_L y D_R , y $\phi \equiv 0$ en ∂D , tenemos, por el teorema de la divergencia, que

$$\begin{aligned} I_R &:= \int_{D_R} u \cdot \phi_t + \sum f^j(u) \cdot \phi_{x_j} dx dt = \int_{D_R} (\phi \cdot u)_t + \sum (\phi \cdot f^j(u))_{x_j} dx dt + \\ &\quad - \int_{D_R} \phi \cdot (u_t + \sum f^j(u)_{x_j}) dx dt \\ &= \int_{\partial D_R} \begin{pmatrix} \phi \cdot f^1(u) \\ \vdots \\ \phi \cdot f^d(u) \\ \phi \cdot u \end{pmatrix} \cdot \hat{n} dS_{x,t} \\ &= \int_{\Sigma \cap D} \begin{pmatrix} \phi \cdot f^1(u) \\ \vdots \\ \phi \cdot f^d(u) \\ \phi \cdot u \end{pmatrix} \cdot \hat{n} dS_{x,t}. \end{aligned}$$

Hacemos lo mismo con la integral sobre D_L , sólo que ahora es $-\hat{n}$ la normal exterior a su frontera.

$$I_L := \int_{D_L} u \cdot \phi_t + \sum f^j(u) \cdot \phi_{x_j} dx dt = - \int_{\Sigma \cap D} \begin{pmatrix} \phi \cdot f^1(u) \\ \vdots \\ \phi \cdot f^d(u) \\ \phi \cdot u \end{pmatrix} \cdot \hat{n} dS_{x,t}.$$

De este modo llegamos a,

$$0 = I_R + I_L = \int_{\Sigma \cap D} (n_t(u_R - u_L) + \sum n_j(f^j(u_R) - f^j(u_L))) \cdot \phi dS_{x,t},$$

lo cual se cumple para toda D bola arbitraria con centro en Σ y toda ϕ con soporte compacto en D . Por lo tanto llegamos a las siguientes ecuaciones que se cumplen en cada punto de Σ ,

$$n_t[u] + \sum_{j=1}^d n_j[f^j(u)] = 0, \quad (x, t) \in \Sigma \quad (6)$$

donde, para toda $(x, t) \in \Sigma$, definimos el “salto” para cualquier función $g(u)$ como

$$[g(u)] := g(u_R) - g(u_L). \quad (7)$$

Las condiciones de salto (6) son conocidas como *las condiciones de Rankine-Hugoniot*. Éstas expresan el principio de conservación (3) a través de la frontera, y constituyen reticciones para las posibles discontinuidades de una solución débil.

Por ejemplo, en el caso de una dimensión espacial, $d = 1$, Σ es una curva de la forma

$$\Sigma = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : x = \check{x}(\sigma), t = \check{t}(\sigma), \sigma \in I \subseteq \mathbb{R}\}$$

con funciones derivables \check{x} y \check{t} de σ en un intervalo I . El vector normal unitario es

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{\check{x}'(\sigma)^2 + \check{t}'(\sigma)^2}} \begin{pmatrix} -\check{t}'(\sigma) \\ \check{x}'(\sigma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{n}_x \\ \hat{n}_t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

de tal forma que las condiciones de Rankine-Hugoniot (6) a lo largo de Σ se escriben como

$$-\check{x}'(\sigma)[u] + \check{t}'(\sigma)[f(u)] = 0, \quad (x, t) \in \Sigma.$$

Si podemos reparametrizar la curva en términos de t , por ejemplo, si $\dot{\gamma}'(\sigma) \neq 0$ para toda $\sigma \in I$, las condiciones de salto se leen

$$-\frac{d\bar{x}}{dt}[u] + [f(u)] = 0,$$

donde

$$s := \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\dot{\gamma}'(\sigma)}{\dot{\gamma}'(\sigma)},$$

es la *velocidad de la discontinuidad o velocidad de choque*. Aquí $\bar{x}(t) := \dot{\gamma}(\sigma(t))$.

Para el caso de una ecuación escalar en una dimensión espacial $d = 1, n = 1$,

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (8)$$

con $u \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la velocidad de la discontinuidad está dada puntualmente por

$$s = \frac{[f(u)]}{[u]},$$

si $[u] \neq 0$.

El ejemplo más simple de una solución discontinua es el de un plano que separa dos valores constantes. Sea $v \in \mathbb{R}^d$ un vector no nulo, $|v| = 1$, que define una dirección de propagación. La discontinuidad Σ tendrá la forma

$$\Sigma = \{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, +\infty) : x \cdot v - st = 0\},$$

es decir, tenemos un frente plano que se propaga con velocidad $s \in \mathbb{R}$ en dirección v . La solución discontinua de la forma

$$u(x, t) = \begin{cases} u_R; & x \cdot v > st, \\ u_L; & x \cdot v < st, \end{cases} \quad (9)$$

donde u_R y u_L son constantes, es conocida como una *onda de choque*. Sobre el frente se satisfacen las condiciones de Rankine-Hugoniot

$$-s[u] + \sum_{j=1}^d v_j [f^j(u)] = 0, \quad (10)$$

las cuales determinan la velocidad del choque. Claramente, por la observación 1.2, dado que (9) es constante por pedazos, satisface trivialmente la ecuación diferencial, y dado que el frente satisface las relaciones de Rankine-Hugoniot, la solución discontinua (9) es una *solución débil* de la ecuación (1).

1.6. No unicidad de soluciones débiles. Como ejemplo, consideremos la ecuación escalar de Burgers

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \quad (11)$$

en una dimensión espacial $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$. Aquí, $f(u) = \frac{1}{2}u^2$. Consideremos el problema de Cauchy asociado con condición inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 0; & x > 0, \\ 1; & x < 0. \end{cases} \quad (12)$$

En este caso, tenemos que $u_L = 1$ y $u_R = 0$. El problema de Cauchy con condición inicial discontinua (12) (constante para $x < 0$ y para $x > 0$) se conoce como *problema de Riemann* [3, 2]. Como vimos, un frente (u onda de choque) de la forma (9) que separa valores

constantes y que se propaga con velocidad s es una solución débil siempre y cuando la velocidad satisfaga

$$s = \frac{[f(u)]}{[u]} = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{\frac{1}{2}(0)^2 - \frac{1}{2}(1)^2}{0 - 1} = \frac{1}{2}.$$

De esta manera, una solución débil tipo onda de choque está dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} 0; & x > \frac{1}{2}t, \\ 1; & x < \frac{1}{2}t. \end{cases} \quad (13)$$

La solución es constante para $x > \frac{1}{2}t$ y toma el valor $u \equiv 0$; igualmente para $x < \frac{1}{2}t$ toma el valor $u \equiv 1$. El choque o frente está dado por la línea recta $\{x - \frac{1}{2}t = 0\}$. Es claro que esta solución es una solución débil (en este caso, discontinua) de (11) - (12). La solución (13) con su condición inicial (12) están representados en la Figura 4.

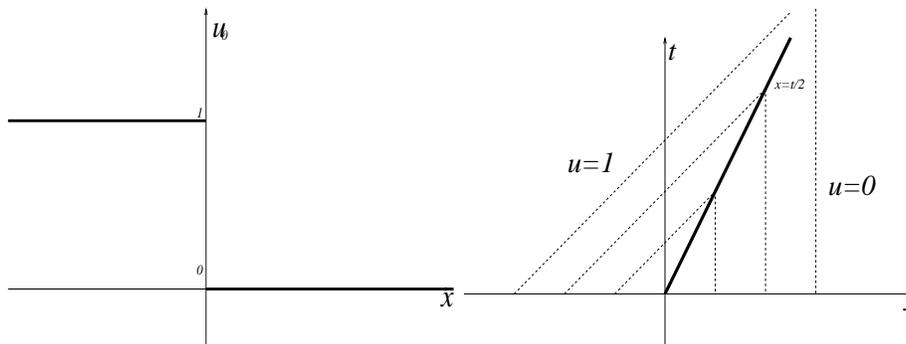


FIGURA 4. Condición inicial (12) (izquierda) y la solución en forma de onda de choque (13) (derecha). La línea continua representa la discontinuidad $\{x = \frac{1}{2}t\}$ que se propaga con velocidad $s = \frac{1}{2}$. Las líneas punteadas son las curvas características de la forma $x = ut + x_0$, donde la pendiente de la recta es $u = 1$ a la izquierda del choque y $u = 0$ a su derecha. Nótese que las características aparentan “entrar” a la discontinuidad.

Como vimos en la primera parte (Lección 1), la solución es constante a lo largo de curvas características de la forma

$$x(t) = ut + x_0,$$

donde la pendiente u es el valor de la solución (en este caso, constante) a cada lado de la discontinuidad. Por lo tanto las curvas características son de la forma $x = x_0$ a la derecha del choque y de la forma $x = t + x_0$ a la izquierda del mismo. Se puede apreciar en la Figura 4 que las características aparentan “entrar” en la discontinuidad.

Consideremos ahora la misma ecuación de Burgers (11) pero ahora con condición inicial “invertida”,

$$u_0(x) = \begin{cases} 1; & x > 0, \\ 0; & x < 0, \end{cases} \quad (14)$$

es decir, donde ahora $u_L = 1$ y $u_R = 0$. Notamos que una onda de choque se propagará también con la misma velocidad

$$s = \frac{[f(u)]}{[u]} = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{\frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{2}(0)^2}{1 - 0} = \frac{1}{2},$$

y tendrá la siguiente forma

$$u(x, t) = \begin{cases} 1; & x > \frac{1}{2}t, \\ 0; & x < \frac{1}{2}t. \end{cases} \quad (15)$$

Sin embargo, ahora las curvas características tienen pendiente $u = 0$ del lado izquierdo del choque, y $u = 1$ del lado derecho del mismo, de modo que las rectas aparentan “salir” de la discontinuidad $x = \frac{1}{2}t$. Ver Figura 5.

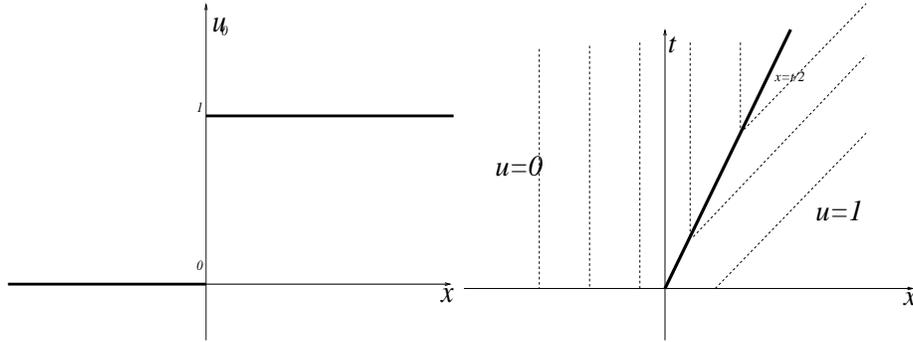


FIGURA 5. Condición inicial (14) (izquierda) y la solución en forma de onda de choque (15) (derecha). La línea continua representa la discontinuidad $\{x = \frac{1}{2}t\}$ que se propaga con velocidad $s = \frac{1}{2}$. Las líneas punteadas son las curvas características de la forma $x = ut + x_0$, donde ahora la pendiente de la recta es $u = 0$ a la izquierda del choque y $u = 1$ a su derecha. Nótese que las características, en este caso, aparentan “salir” de la discontinuidad. Éste es un caso de un choque “no físico”.

Claramente, la solución (15) es una solución débil del problema (11) con condiciones iniciales (14). Vamos a construir otra solución débil al mismo problema. Consideremos ahora la función

$$u(x, t) = \begin{cases} 0; & x < 0, \\ x/t; & 0 \leq x < t, \\ 1; & t < x. \end{cases} \quad (16)$$

Notemos que esta nueva función satisface trivialmente la ecuación diferencial (11) en el interior de las regiones donde está definida, ya que es constante para $x < 0$ y $x \geq t$, mientras que para $0 < x < t$,

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = \partial_t(x/t) + \partial_x\left(\frac{1}{2}x^2/t^2\right) = -x/t^2 + x/t^2 = 0.$$

La solución (16) está representada en la Figura 6. La condición inicial (14) se satisface claramente por construcción. Otra observación importante es que esta solución es continua en $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ a pesar de que los datos iniciales son discontinuos. Una solución de este tipo (16) es llamada una *onda de rarefacción*.

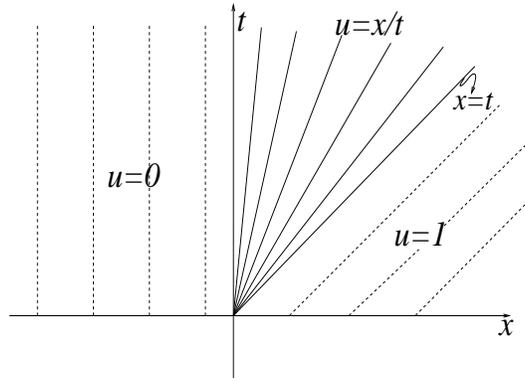


FIGURA 6. Solución en forma de *onda de rarefacción* (16) con condiciones iniciales (14), las mismas que en la Figura 5. Notamos que la solución es continua, a pesar de que los datos iniciales son discontinuos. La solución es constante para $x < 0$ y para $x > t$, mientras que en el intervalo $0 \leq x < t$ toma el valor *autosimilar* $u(x, t) = x/t$, el cual está representado como el “fan” o “ventilador” en la figura.

Proposición 1.3. *La onda de rarefacción (16) es una solución débil de (11) con condición inicial (14).*

Prueba. Tomemos una función de prueba $\phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ y definimos

$$I := \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u\phi_t + \frac{1}{2}u^2\phi_x \, dx \, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)\phi(x, 0) \, dx =: I_{\text{int}} + I_0,$$

donde I_{int} es la integral en todo $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ y I_0 es la segunda integral en $\mathbb{R} \times \{t = 0\}$. El soporte de ϕ interseca $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ en una región Ω que se divide en tres componentes $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ tal como se muestra en la Figura 7.

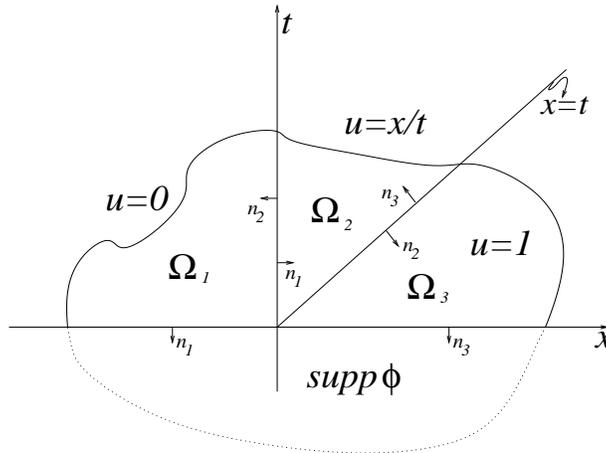


FIGURA 7. Intersección entre el soporte de $\phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ y $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$. La región se divide en tres componentes $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ con normales exteriores n_1, n_2 y n_3 respectivamente.

De este modo, tenemos que

$$I_{\text{int}} = I_1 + I_2 + I_3,$$

donde

$$I_j = \int_{\Omega_j} u\phi_t + \frac{1}{2}u^2\phi_x dxdt, \quad j = 1, 2, 3.$$

Notemos que $u \equiv 0$ en el interior de Ω_1 , por lo que

$$I_1 = 0.$$

Por el teorema de la divergencia tenemos que

$$I_j = \int_{\partial\Omega_j} \phi \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^2 \\ u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_t \end{pmatrix} dS_{x,t} - \int_{\Omega_j} \phi(u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x) dxdt,$$

para todo $j = 1, 2$. Dado que en el interior de cada Ω_j la función satisface la ecuación diferencial $u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = 0$ (u es constante en el interior de Ω_3 , y $u = x/t$ es solución en el interior de Ω_2), la última integral es cero, y tenemos que

$$I_j = \int_{\partial\Omega_j} \phi \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^2 \\ u \end{pmatrix} \cdot \hat{n}_j dS_{x,t},$$

para todo $j = 1, 2$, donde $\hat{n}_j = (\hat{n}_j^x, \hat{n}_j^t)^\top$ es la normal exterior a $\partial\Omega_j$. En vista de que $\phi \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$, las integrales de línea se reducen a

$$I_2 = \int_{\Omega \cap \{x=0\}} \phi \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^2 \\ u \end{pmatrix} \cdot \hat{n}_2 dS_{x,t} + \int_{\Omega \cap \{x=t\}} \phi \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^2 \\ u \end{pmatrix} \cdot \hat{n}_2 dS_{x,t},$$

$$I_3 = \int_{\Omega \cap \{t=0\}} \phi \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^2 \\ u \end{pmatrix} \cdot \hat{n}_3 dS_{x,t} + \int_{\Omega \cap \{x=t\}} \phi \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^2 \\ u \end{pmatrix} \cdot \hat{n}_3 dS_{x,t}.$$

Sobre $\{x=0\} \cap \Omega$, del lado de Ω_2 , u toma el valor

$$u|_{\{x=0\} \cap \Omega_2} = \left(\frac{x}{t}\right)_{|x=0} = 0.$$

Sobre $\{x=t\} \cap \Omega$, del lado de Ω_2 , u toma el valor

$$u|_{\{x=t\} \cap \Omega_2} = \left(\frac{x}{t}\right)_{|x=t} = 1,$$

y la normal exterior es

$$\hat{n}_2 = \begin{pmatrix} n_2^x \\ n_2^t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por ende,

$$I_2 = \int_{\Omega \cap \{x=t\}} \phi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{dS_{x,t}}{\sqrt{2}} = - \int_{\Omega \cap \{x=t\}} \phi \frac{dS_{x,t}}{2\sqrt{2}}$$

Análogamente, sobre $\{x=t\} \cap \Omega$, del lado de Ω_3 , u toma el valor $u \equiv 1$ y la normal exterior es

$$\hat{n}_3 = -\hat{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sobre $\{t=0\} \cap \Omega$, del lado de Ω_3 , u toma el valor $u \equiv 1$ y la normal exterior es

$$\hat{n}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\Omega \cap \{x=t\}} \phi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{dS_{x,t}}{\sqrt{2}} + \int_{\Omega \cap \{t=0\}} \phi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dS_{x,t} \\ &= \int_{\Omega \cap \{x=t\}} \phi \frac{dS_{x,t}}{2\sqrt{2}} - \int_{\Omega \cap \{t=0\}} 1 \cdot \phi dS_{x,t}. \end{aligned}$$

De esta manera tenemos que

$$I_{\text{int}} = I_1 + I_2 + I_3 = - \int_{\Omega \cap \{t=0\}} 1 \cdot \phi dS_{x,t}.$$

Parametrizando en $\{t=0\}$ por $dS_{x,t} = dx$, y dado que la condición inicial es tal que $u_0 = 1$ para $x > 0$ y $u_0 = 0$ para $x < 0$, reconocemos que

$$I_{\text{int}} = - \int_0^{+\infty} u_0(x) \phi(x, 0) dx - \int_{-\infty}^0 u_0(x) \phi(x, 0) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) \phi(x, 0) dx = -I_0,$$

ya que ϕ se anula fuera de Ω . Así, hemos probado que $I = I_{\text{int}} + I_0 = 0$ para toda función de prueba $\phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, es decir, la onda de rarefacción (16) es una solución débil de (11) con condición inicial (14). \square

De este modo, hemos probado que soluciones débiles *no son únicas*. Más aún, la definición de solución débil es muy laxa, ya que existe una espectacular pérdida de unicidad. En efecto, para la ecuación (11) con condición inicial (14) podemos probar que existe una infinidad de soluciones débiles. Sea cualquier $\alpha \in [0, 1]$ y definamos las funciones (parametrizadas por α)

$$u_\alpha(x, t) = \begin{cases} 0; & x < \frac{\alpha}{2}t, \\ \alpha; & \frac{\alpha}{2}t \leq x < \alpha t, \\ x/t; & \alpha t \leq x < t, \\ 1; & t \leq x. \end{cases} \quad (17)$$

Es posible demostrar que cada u_α es una solución débil de (11) - (14), para cada $\alpha \in [0, 1]$.

Ejercicio 1.4. Verificar la aseveración anterior.

Esta falta de unicidad no es admisible ni desde el punto de vista matemático, ni desde el punto de vista físico. Para tener una teoría aceptable es necesario que la solución encontrada (si es el caso) sea única y continua con respecto a los datos iniciales, es decir, que el problema de Cauchy esté bien planteado, o que satisfaga:

1. Para datos iniciales dados en un cierto espacio Y , el problema de Cauchy admite una solución en el espacio Z que está contenido en $L^\infty(\mathbb{R}; Y)$.
2. Dicha solución es *única*.
3. El mapeo $Y \rightarrow Z$ que lleva los datos iniciales a la solución es un mapeo *continuo*.

Si el problema satisface los puntos 1 a 3 anteriores, se dice que está *bien planteado en el sentido de Hadamard* (ver, por ejemplo, [2]).

Para garantizar unicidad vamos a requerir condiciones extra que están motivadas por problemas de la física, es decir, sus definiciones provienen de mecanismos para escoger la solución que sea “físicamente relevante”. En el caso de la ecuación de Burgers, por ejemplo, necesitamos condiciones que nos permitan distinguir entre las soluciones débiles (15) (onda de choque) y (16) (onda de rarefacción), las cuales tienen la misma condición inicial (14). Hemos denominado a la solución discontinua (15) como un choque “no físico” ya que

no satisface ninguno de los criterios que mencionaremos a continuación y que estudiaremos con más detalle en el capítulo siguiente. Observemos, pues, las ondas de choque representadas en las figuras 4 y 5. Aunque ambas son discontinuidades que se propagan con la misma velocidad, notamos que tienen propiedades geométricas diferentes. En el caso de la Figura 4, notamos que las características aparentan “entrar” en la discontinuidad, mientras que en la Figura 5 las características “salen” de la misma. Esta observación tiene la siguiente interpretación. Si las características salen del choque, la discontinuidad es entonces inestable bajo perturbaciones, es decir, existen puntos $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ tales que si dibujamos la característica que pasa por dichos puntos “de regreso” en el tiempo, nos cruzamos con la discontinuidad, violando así la unicidad de la solución. Sin embargo, en el caso en el que las características entran en el choque, para cada punto fuera de la discontinuidad la característica que pasa por él no interseca ninguna otra para tiempos menores. Estas observaciones motivan la siguiente definición.

Definición 1.5 (Condición de entropía de Lax (versión escalar)). Una discontinuidad propagándose con velocidad s que satisface la condición de Rankine-Hugoniot se dice que satisface la condición de entropía de Lax si

$$f'(u_L) > s > f'(u_R). \quad (18)$$

Notemos que la onda de choque (13) satisface la condición de entropía de Lax,

$$f'(u_L) = u_L = 1 > s = \frac{1}{2} > 0 = u_R = f'(u_R),$$

mientras que (15), no:

$$f'(u_L) = u_L = 0 < s = \frac{1}{2} < 1 = u_R = f'(u_R).$$

Por otra parte, si f es estrictamente convexa, $f''(u) > 0$, entonces (18) se reduce a pedir que $u_L > u_R$. Otra condición de entropía es la siguiente:

Definición 1.6 (Condición de entropía de Lax-Oleinik). u es una solución entrópica si todas las discontinuidades satisfacen

$$\frac{f(u) - f(u_L)}{u - u_L} \geq s \geq \frac{f(u) - f(u_R)}{u - u_R}, \quad (19)$$

para toda u entre u_L y u_R .

Claramente la condición (19) es más general que (18). De hecho, si f es convexa entonces (19) implica (18). Otra condición es la condición de Oleinik:

Definición 1.7 (Condición de entropía de Oleinik). u es una solución entrópica si existe una constante $C > 0$ tal que para toda $a > 0$ y toda $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} < \frac{C}{t}. \quad (20)$$

La condición de Oleinik se puede interpretar geoméricamente de la siguiente manera. Si fijamos $t > 0$ y tomamos x que corre de $-\infty$ a $+\infty$, un posible salto o discontinuidad en u sólo puede ser hacia abajo (decreciente), es decir, en dirección de la discontinuidad. Ésta propiedad en la que los saltos pueden tener sólo una dirección, nos recuerdan cantidades físicas, tales como la *entropía física*, que sólo pueden experimentar cambios con signo definido. Naturalmente, nuestro choque físico (13) para la ecuación de Burgers satisface la condición de Oleinik, ya que,

$$\frac{1}{t} > \frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} = \begin{cases} 0; & \text{si } x+a < \frac{1}{2}t, \text{ ó } \frac{1}{2}t \geq x \\ -1/a; & \text{si } x < \frac{1}{2}t \leq x+a, \end{cases}$$

para toda $t > 0$ y toda $a > 0$; mientras que la onda de choque (15) viola la condición (20): tomemos $a = \epsilon$ con $0 < \epsilon \ll 1$ suficientemente chico, y $x = 2$, por lo que (20) implica

$$u(2 + \epsilon, 1) - u(2, 1) = 1 \leq C\epsilon;$$

tomando $\epsilon \rightarrow 0^+$ tenemos una contradicción.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] R. G. BARTLE, *The elements of integration and Lebesgue measure*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1995.
- [2] D. SERRE, *Systems of Conservation Laws 1: Hyperbolicity, entropies, shock waves*, Cambridge University Press, 1999.
- [3] J. SMOLLER, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York, Second ed., 1994.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y MECÁNICA, IIMAS-UNAM, APDO. POSTAL 20-726, C.P. 01000 MÉXICO D.F. (MÉXICO)

E-mail address: plaza@mym.iimas.unam.mx