

LECCIÓN 1: INTRODUCCIÓN Y EJEMPLOS

RAMÓN G. PLAZA

1. INTRODUCCIÓN

1.1. **Motivación.** Pensemos en la ecuación diferencial parcial más simple posible,

$$u_t + au_x = 0, \quad (1)$$

donde $u \in \mathbb{R}$, y $a \in \mathbb{R}$ es una constante distinta de cero; $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$. La ecuación (1) representa una ecuación lineal de advección en una dimensión espacial (ver, por ejemplo, las notas de LeVeque [8]). El problema de Cauchy para esta ecuación consiste en resolver (1) con condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (2)$$

en el dominio $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

Definición 1.1. Una solución clásica de (1)-(2) es una solución de clase C^1 para $t > 0$, continua para $t \geq 0$, que satisface (1) puntualmente.

Si u_0 es diferenciable, es fácil probar que la solución al problema de Cauchy (1)-(2) está dada por

$$u(x, t) = u_0(x - at), \quad (3)$$

para todo x y t . Es decir, los datos iniciales se propagan (sin cambio en su forma) a la derecha si $a > 0$ o a la izquierda si $a < 0$. La solución $u(x, t)$ es constante a lo largo de las *curvas características*,

$$\begin{aligned} x'(t) &= a, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

es decir,

$$x(t) = at + x_0.$$

Ver Figura 1 para el caso en que $a > 0$.

Dicho de otro modo, dados (x, t) en $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$, existe $x_0(x, t) = x - at$ tal que $u(x, t) = u_0(x_0(x, t))$ es la solución al problema. Notemos que si diferenciamos $u(x, t)$ a lo largo de las curvas características obtenemos

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = x'(t)u_x + u_t = au_x + u_t = 0,$$

por lo que el mapeo $t \mapsto u(x_0 + at, t)$ es constante con valor $u_0(x_0)$.

Observación 1.2. (3) es la única solución a (1)-(2) y existe para todo tiempo $t \geq 0$.

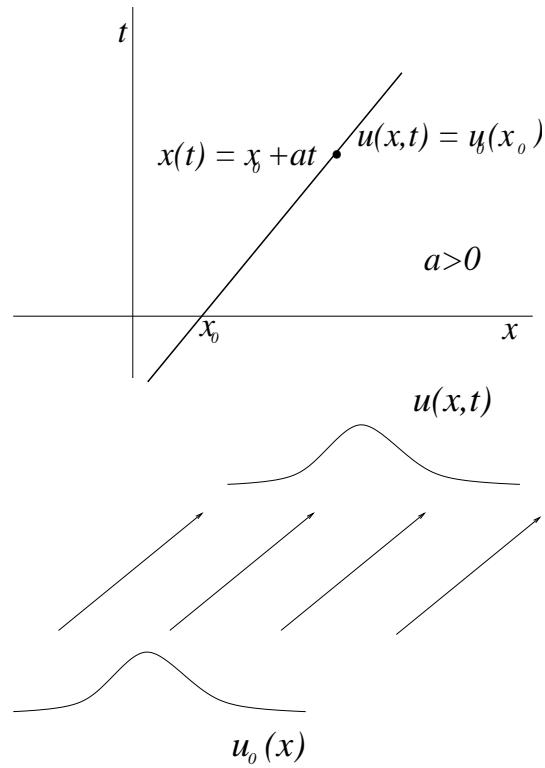


FIGURA 1. Curvas características para $a > 0$ (arriba). La condición inicial $u_0(x)$ se propaga sin cambios a la derecha con velocidad $a > 0$ (abajo).

Podemos también considerar a la velocidad como función de x , es decir, tomar la ecuación,

$$u_t + (a(x)u)_x = 0, \quad (4)$$

donde $a(x)$ es una función suave. Esta ecuación puede interpretarse como la relación que gobierna la concentración de cierta sustancia u con velocidad variable $a(x)$. En este caso, podemos escribir

$$(\partial_t + a(x)\partial_x)u = -a'(x)u,$$

lo cual sugiere definir las curvas características como soluciones a

$$\begin{aligned} x'(t) &= a(x), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

para cierto $x_0 \in \mathbb{R}$. Notamos que sobre las curvas características, la solución u satisface una ecuación ordinaria

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x(t), t) &= -a(x(t))u, \\ u(x(0), 0) &= u_0(x_0). \end{aligned}$$

En este caso u no es constante a lo largo de las curvas características, pero el problema se reduce a resolver dos ecuaciones ordinarias.

En ambos casos se puede probar que si u_0 es suficientemente regular, por ejemplo, $u_0 \in C^k(\mathbb{R})$ para $k > 0$, entonces la solución u es igualmente suave en el espacio y en el tiempo, es decir, $u \in C^k(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$. Mas aún, la solución existe para todo tiempo $t \geq 0$.

¿Qué sucede, sin embargo, si consideramos que la velocidad depende de u , es decir, si $a = a(u)$? Veamos el caso más simple, en que a depende de u linealmente, a saber, $a(u) = u$. La ecuación toma la forma

$$u_t + uu_x = 0. \quad (5)$$

Esta ecuación se conoce como *ecuación de Burgers no viscosa*. Nuevamente, nos interesa resolver el problema de Cauchy con condición inicial (2). Si buscamos una curva característica sobre la cual la solución permanece constante, llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x'(t) &= u, \\ u'(t) &= 0, \end{aligned}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \\ u(0) &= u_0(x_0), \end{aligned}$$

para x_0 dado. La solución a este sistema de ecuaciones es, obviamente, una línea recta con pendiente $u_0(x_0)$,

$$x(t) = u_0(x_0)t + x_0,$$

a lo largo de la cual el valor de u es constante. En efecto, si diferenciamos $u(x, t)$ a lo largo de las curvas características, tenemos que

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = x'(t)u_x + u_t = uu_x + u_t = 0.$$

Como anteriormente, el problema de Cauchy se reduce, dados (x, t) en $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$, a encontrar x_0 tal que

$$x = u_0(x_0)t + x_0.$$

Por el teorema de la función implícita, para encontrar x_0 requerimos que

$$\frac{d}{dx_0}(u_0(x_0)t + x_0) = u_0'(x_0)t + 1 \neq 0.$$

Esto es posible si t es pequeño y $u_0'(x_0)$ es acotado. Pero para t suficientemente grande podemos llegar a una contradicción. Tomemos por ejemplo u_0 tal que $u_0(-1) = 1$ y $u_0(1) = 0$. Como se puede apreciar en la Figura 2 el valor de u es constante a lo largo de dos líneas rectas que se intersectan a tiempo $t = 2$, por lo que la solución en el sentido clásico deja de existir a tiempo finito. Podemos probar que si $u_0'(x)$ es negativa para alguna x entonces existe un tiempo de “rompimiento” t^* dado por,

$$t^* = \frac{-1}{\min u_0'(x)} > 0,$$

a partir del cual las características se intersectan y la solución es multivaluada. Esto nos lleva a la definición de “tiempo de existencia” de una solución clásica y a la necesidad de extender nuestra definición de solución para considerar situaciones más generales. Éste fenómeno de “rompimiento” de la solución a tiempo finito es típicamente no lineal, es decir, se debe a la naturaleza no lineal de la ecuación.

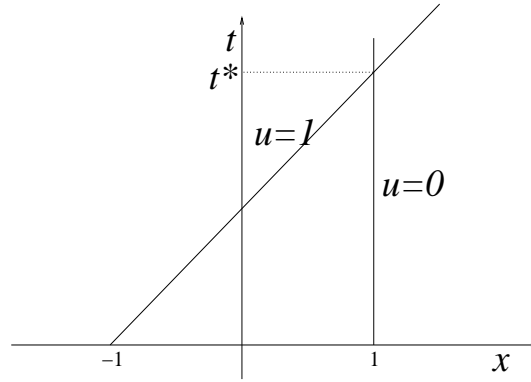


FIGURA 2. Incluso con condiciones iniciales suaves, las soluciones de la ecuación no lineal (5) dejan de existir a tiempo finito. En la gráfica, dos características se intersectan a tiempo $t = 2 > t^*$, donde t^* es el tiempo de rompimiento.

Observación 1.3. La ecuación de Burgers no viscosa (5) se puede escribir, cuando la solución es clásica, como

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (6)$$

donde el *flujo* f está dado por una función no lineal,

$$f(u) = \frac{1}{2}u^2.$$

Esta ecuación en forma de divergencia se conoce como una *ley de conservación*. Ésta expresa un principio fundamental de conservación de la cantidad u a lo largo de un conjunto en \mathbb{R} , para la cual la pérdida o ganancia de esta cantidad a lo largo de la frontera de dicho conjunto está controlada por una función de *flujo* no lineal dada por f .

A continuación vamos a generalizar este tipo de ecuaciones a sistemas.

1.2. Sistemas de leyes de conservación. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $n \geq 1$, y sean d funciones $f^j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $d \geq 1$, usualmente no lineales, y de clase, por ejemplo, $C^2(\Omega)$. Aquí d es la dimensión de las variables espaciales, $x \in \mathbb{R}^d$. Un sistema de leyes de conservación es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de la forma

$$u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} = 0, \quad (7)$$

donde $u(x, t) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, +\infty)$. Este sistema de ecuaciones expresa la conservación de n cantidades o *variables de estado*, cuyas densidades están dadas por el vector $u = (u_1, \dots, u_n)^\top \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, en una región del espacio físico. Para representar los flujos denotemos

$$F(u) := (f^1(u), \dots, f^d(u)) \in \mathbb{R}^{n \times d},$$

a la matriz de dimensión $n \times d$ que tiene como columnas¹ a las funciones de flujo $f^j(u) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

¹La componente (i, j) de F está dada por $f_i^j(u)$, con $1 \leq j \leq d$, $1 \leq i \leq n$. Aquí $f^j(u) = (f_1^j(u), \dots, f_n^j(u))^\top \in \mathbb{R}^n$.

Para ilustrar el principio de conservación sea $D \subset \mathbb{R}^d$ una región arbitraria del espacio físico, acotado y abierto con frontera suficientemente suave como para aplicar el teorema de la divergencia (por ejemplo, de clase C^1). Sea $\hat{n} = (n_1, \dots, n_d)^\top \in \mathbb{R}^d$, $|\hat{n}| = 1$, el vector normal a ∂D que apunta al exterior de D . El vector

$$\int_D u dx \in \mathbb{R}^n,$$

representa la cantidad total de las variables de estado en la región D al tiempo $t \geq 0$. La razón de cambio de u en D está gobernada por el flujo F , que controla el incremento o pérdida de las variables de estado a través de la frontera ∂D . De esta manera, el principio de conservación se puede expresar como

$$\frac{d}{dt} \int_D u dx = - \int_{\partial D} F(u) \hat{n} dS_x \in \mathbb{R}^n.$$

Por el teorema de la divergencia, para cada componente $1 \leq k \leq n$ del vector anterior se cumple que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int_D u_k dx + \int_{\partial D} \sum_{j=1}^d n_j f_k^j(u) dS_x \\ &= \frac{d}{dt} \int_D u_k dx + \int_D \operatorname{div} \begin{pmatrix} f_k^1(u) \\ \vdots \\ f_k^d(u) \end{pmatrix} dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_D u_k dx + \int_D \sum_{j=1}^d (f_k^j(u))_{x_j} dx, \end{aligned}$$

o simplemente,

$$\int_D u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} dx = 0. \quad (8)$$

Dado que la región D es arbitraria, el integrando debe ser cero puntualmente, dando lugar a la relación (7).

1.3. Ejemplos. A continuación daremos una lista de sistemas de ecuaciones que revisiten importancia en el estudio de ciertos fenómenos en mecánica de medios continuos, dinámica de gases, modelos de tráfico, etc., los cuales tienen forma de sistemas de leyes de conservación, o en su defecto, *leyes de balance*, es decir, cuando consideramos fuerzas externas que actúan como inhomogeneidades del sistema (7). Una buena lista de sistemas de leyes de conservación y de leyes de balance se encuentra en el libro de Serre [9], de donde he tomado algunos de los siguientes ejemplos. Los ejemplos marcados con una ”*” son aquéllos que no vimos en clase, pero a los que se hará referencia a lo largo de estas notas.

1.3.1. *Ecuaciones de Euler para un gas compresible.* Las ecuaciones que gobiernan la dinámica de un gas compresible no viscoso, que no conduce calor tienen la siguiente forma,

$$\rho_t + \sum_{j=1}^3 (\rho v_j)_{x_j} = 0 \quad (\text{conservación de masa}) \quad (9)$$

$$(\rho v_i)_t + \sum_{j=1}^3 (\rho v_i v_j)_{x_j} + p_{x_i} = 0 \quad (\text{conservación de momento}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

$$(\rho E)_t + \sum_{j=1}^3 (\rho E v_j + p v_j)_{x_j} = 0 \quad (\text{conservación de energía}), \quad (11)$$

donde

$$\begin{aligned} 0 < \rho &= \text{densidad de masa,} \\ \mathbb{R}^3 \ni v &= \text{velocidad,} \\ 0 < E &= e + \frac{1}{2}|v|^2 = \text{densidad de energía total,} \\ 0 < e &= \text{densidad de energía interna del gas,} \\ p &= \text{presión termodinámica.} \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones se escribe en forma abreviada como,

$$\begin{aligned} \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) &= 0, \\ (\rho v)_t + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) + \nabla p &= 0, \\ (\rho E)_t + \operatorname{div}(\rho E v + p v) &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

y se conoce como *ecuaciones de Euler para un gas compresible*. El sistema está complementado por una ecuación de estado,

$$p = \hat{p}(\rho, e),$$

que determina la presión en términos de la densidad y de la densidad de energía interna.

Este sistema de ecuaciones tiene la forma (7), donde $d = 3$ es la dimensión del espacio físico, y $n = 5$ el número de variables de estado, las cuales son

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \rho E \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5,$$

mientras que las funciones de flujo están dadas por

$$\begin{aligned} F(u) &= \begin{pmatrix} \rho v_1 & \rho v_2 & \rho v_3 \\ \rho v_1^2 + p & \rho v_1 v_2 & \rho v_1 v_3 \\ \rho v_1 v_2 & \rho v_2^2 + p & \rho v_2 v_3 \\ \rho v_1 v_3 & \rho v_2 v_3 & \rho v_3^2 + p \\ (\rho E + p)v_1 & (\rho E + p)v_2 & (\rho E + p)v_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ (u_2)^2/u_1 + \hat{p} & u_2 u_3/u_1 & u_2 u_4/u_1 \\ u_2 u_3/u_1 & (u_3)^2/u_1 + \hat{p} & u_3 u_4/u_1 \\ u_2 u_4/u_1 & u_3 u_4/u_1 & (u_4)^2/u_1 + \hat{p} \\ u_2 u_5/u_1 + (u_2/u_1)\hat{p} & u_3 u_5/u_1 + (u_3/u_1)\hat{p} & u_4 u_5/u_1 + (u_4/u_1)\hat{p} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\hat{p} = \hat{p}\left(u_1, u_5/u_1 - \frac{1}{2}(u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)/u_1^2\right).$$

Dado que lo estudiaremos mucho durante el curso, vale la pena escribir el sistema de Euler en una dimensión espacial, en su formulación euleriana,

$$\begin{aligned}\rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_x &= 0, \\ (\rho E)_t + (\rho E v + p v)_x &= 0.\end{aligned}\tag{13}$$

Evidentemente, aquí $d = 1$ y $n = 3$. En su versión lagrangiana, el sistema de ecuaciones para un gas compresible tienen la forma,

$$\begin{aligned}w_t - u_x &= 0, \\ u_t + p_x &= 0, \\ E_t + (p u)_x &= 0,\end{aligned}\tag{14}$$

donde

$$\begin{aligned}1/\rho = w &= \text{volumen específico}, \\ u &= \text{velocidad},\end{aligned}$$

y la presión está dada por

$$p = \hat{p}(e, w) = \hat{p}(e, 1/\rho).$$

Existe gran cantidad de referencias sobre las ecuaciones de Euler. Un tratamiento clásico se puede encontrar en el libro de Courant y Friedrichs [2]. Recomiendo ver el capítulo 18 del libro de Smoller [10].

1.3.2. *Ecuación de tráfico.* Consideremos una carretera en un solo sentido, sin entradas ni salidas. Sea ρ la densidad de autos (número de autos por unidad de longitud). Supongamos que ρ está acotado

$$0 \leq \rho \leq \rho_{\max},$$

donde ρ_{\max} está relacionado con el número máximo posible de autos en la carretera. De este modo, sea u la velocidad de los autos en la carretera. Suponemos que la carretera tiene también un límite de velocidad u_{\max} . Por conservación de masa de autos tenemos la siguiente ecuación,

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0,$$

que representa la conservación de la cantidad de autos en la carretera, que se desplazan con velocidad u . Podemos suponer que la velocidad depende de la densidad de autos, siendo ésta decreciente con respecto a ρ (los autos van más lento cuando hay muchos autos). De este modo podemos proponer una relación simple del tipo

$$u(\rho) = u_{\max} (1 - \rho/\rho_{\max}),$$

en la que evidentemente $u(0) = u_{\max}$ y $u \rightarrow 0$ cuando $\rho \rightarrow \rho_{\max}$. El modelo toma la siguiente forma de una ley de conservación,

$$\rho_t + q(\rho)_x = 0,\tag{15}$$

con flujo

$$q(\rho) = \rho u_{\max} (1 - \rho/\rho_{\max}).$$

Observación 1.4. Podríamos proponer un modelo más preciso que tome en cuenta cuando un conductor se anticipa y frena (o acelera) cuando éste nota un aumento (o disminución) en la densidad de autos. De esta manera podemos suponer que $u(\rho) - \hat{u}(\rho)$ tiene signo opuesto a ρ_x , donde

$$\hat{u}(\rho) = u_{\max} (1 - \rho/\rho_{\max}),$$

es la velocidad considerada anteriormente. Así, podemos proponer

$$u(\rho) = \hat{u}(\rho) - \epsilon \rho_x,$$

donde $0 < \epsilon \ll 1$ es pequeña. De esta manera, llegamos a la ecuación

$$\rho_t + q(\rho)_x = \epsilon(\rho \rho_x)_x, \quad (16)$$

donde el flujo es el mismo que en la ecuación anterior. Ésta ecuación constituye una regularización de segundo orden a la ley de conservación. Notemos que no está en forma de ley de conservación, aunque partimos de un principio de conservación como tal. Podemos pensar que (16) es una ley de conservación con flujo efectivo $\hat{q}(\rho, \rho_x) = \rho \hat{u}(\rho) - \epsilon \rho \rho_x$. Aquí la dependencia de \hat{q} con respecto a ρ_x cambia por completo la naturaleza de la ecuación, ya que (15) es hiperbólica mientras que (16) es parabólica²

Como referencia a este modelo de tráfico, ver las notas de LeVecque [8].

1.3.3. *El sistema p . El sistema p es el siguiente sistema de dos ecuaciones en una dimensión espacial

$$\begin{aligned} v_t - w_x &= 0, \\ w_t + p(v)_x &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

donde $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función no lineal dada, que satisface $p' < 0$, $p'' > 0$, y donde $v, w \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$. Aquí tenemos como variables de estado y respectivo flujo a

$$u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \text{y} \quad f(u) = \begin{pmatrix} -w \\ p(v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}.$$

El sistema p reviste gran importancia ya que es el paradigma de varios modelos. Por ejemplo, si tomamos las ecuaciones en forma lagrangiana de un gas en el caso isentrópico (entropía constante, que se traduce en no considerar la ecuación de conservación de energía), la presión es una función del volumen específico y hace las veces de la función p . Asimismo, si $v = U_x$ es el gradiente de deformación en una barra elástica unidimensional, y $w = U_t$ es la velocidad local, el sistema de ecuaciones tiene la forma (17) donde el "stress" $-\sigma(v)$ hace las veces de la función p . También el sistema p resulta de escribir una *ecuación de onda no lineal* de la forma

$$u_{tt} - p(u_x)_x = 0,$$

como un sistema de primer orden mediante el cambio de variables $v = u_x, w = u_t$.

Dada su importancia, el sistema p es estudiado en diversos textos, tales como el libro de Evans [4], el libro de Smoller [10] y el folleto de Lax [7].

²Una diferencia importante radica en que la ecuación (16) siempre tiene soluciones clásicas para todo $t > 0$ y todo dato inicial. Por eso le llamamos al término $\epsilon(\rho \rho_x)_x$ una *regularización* de segundo orden.

1.3.4. *Ecuaciones de agua poco profunda. El estudio de ondas viajeras en agua poco profunda nos lleva a un sistema de leyes de conservación que tiene una estructura similar a la de las ecuaciones de Euler (incluso cuando en este caso se trata de flujo *incompresible*). En el caso de una dimensión espacial, consideramos un fluido (por ejemplo, agua) en un canal y asumimos que la velocidad vertical es despreciable y que la velocidad horizontal $v(x, t) \in \mathbb{R}$ es aproximadamente constante para cada sección vertical transversal. Esto es, sólo tenemos una componente de la velocidad en dirección x . Esto es compatible con observaciones experimentales si consideramos ondas de amplitud pequeña en un fluido cuya altura es relativamente pequeña comparada con la longitud de onda. Por ende el nombre de ecuaciones de *agua poco profunda*. Asumimos que este fluido es incompresible, y por lo tanto la densidad $\rho = \rho_0$ es constante. La altura del fluido $h(x, t)$ varía, y la masa total de agua en el intervalo $[x_1, x_2]$ a tiempo t es

$$\rho_0 \int_{x_1}^{x_2} h(x, t) dx.$$

El momento en cada punto es $\rho_0 v$, e integrando verticalmente tenemos que el flujo de masa es $\rho_0 v h$. Dado que ρ_0 es constante, la ecuación de conservación de masa toma la forma familiar

$$h_t + (hv)_x = 0.$$

La ecuación de conservación de momento toma también la misma forma que en las ecuaciones de Euler, a saber,

$$(hv)_t + (hv^2 + p/\rho_0)_x = 0.$$

Aquí la presión está determinada por la relación

$$p = \frac{1}{2} \rho_0 g h^2,$$

determinada por una ley hidrostática integrada verticalmente. Sustituyendo obtenemos

$$(hv)_t + (hv^2 + \frac{1}{2} g h^2)_x = 0.$$

Finalmente, podemos simplificar haciendo el cambio de variables $\eta = gh$ que elimina g de las ecuaciones y obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \eta_t + (v\eta)_x &= 0, \\ v_t + (\frac{1}{2}v^2 + \eta)_x &= 0, \end{aligned} \tag{18}$$

conocido como el sistema para agua poco profunda unidimensional. Nuevamente, (18) tiene la forma de un sistema de leyes de conservación con cantidades conservadas y flujo,

$$u = \begin{pmatrix} \eta \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad f(u) = \begin{pmatrix} v\eta \\ \frac{1}{2}v^2 + \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

respectivamente. Como referencia, consultar el libro de Johnson [6] o el clásico texto de Whitham [11].

1.3.5. *Materiales hiperelásticos*. Consideremos un sólido deformable que en reposo ocupa una configuración de referencia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. La formulación lagrangiana describe el movimiento de este sólido mediante un mapeo

$$(x, t) \mapsto X(x, t) \in \mathbb{R}^3, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, +\infty),$$

que denota la posición a tiempo t de una partícula del sólido que en tiempo $t = 0$ estaba en $x \in \Omega$. De esta forma definimos la velocidad local $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ y el tensor de deformación $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mediante

$$V = X_t, \quad U = \nabla_x X,$$

o componente a componente, $V_j = \partial X_j / \partial t$, $U_{ij} = \partial X_i / \partial x_j$, para todo $i, j = 1, 2, 3$.

Un material es llamado *hiperelástico* si admite una densidad de energía interna dada por una función $W : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$, que depende del gradiente de deformación solamente, $W = W(U)$, y si las fuerzas de deformación se derivan de esta energía (principio de trabajo virtual):

$$\mathcal{F}_\alpha = \sum_j \partial_{x_j} \frac{\partial W}{\partial U_{\alpha j}}, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Restricciones sobre el modelo incluyen:

1. $W(U) = W(RU)$ para toda rotación $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $R^T R = I$, $\det R = 1$. Es decir, la densidad de energía es invariante bajo rotaciones.
2. $\det U > 0$, lo que significa que el material no cambia de orientación.

Las ecuaciones de movimiento que rigen la dinámica del sólido son

$$\partial_t U_{ij} - \partial_{x_j} V_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (19)$$

$$\partial_t V_i - \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} \frac{\partial W}{\partial U_{ij}} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (20)$$

Las primeras 9 ecuaciones (19) corresponden a ecuaciones de compatibilidad, dadas las definiciones de U y V . Las últimas 3 ecuaciones (20) expresan conservación de momento. Este sistema puede abreviarse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} U_t - \nabla_x V &= 0, \\ V_t - \operatorname{div}_x \sigma(U) &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

donde

$$\sigma(U) := \frac{\partial W}{\partial U} \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

es el primer tensor de stress de Piola-Kirchoff, definido componente a componente como

$$\sigma(U)_{ij} = \frac{\partial W}{\partial U_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

El sistema (21) es un sistema de leyes de conservación donde tenemos 12 variables de estado, dados por las 9 componentes del gradiente de deformación y 3 componentes de la velocidad. Por lo tanto, aquí $n = 12$ y $d = 3$. Las variables de estado y los flujos están dados por

$$u = (U_{11}, U_{21}, U_{31}, U_{12}, U_{22}, U_{32}, U_{13}, U_{23}, U_{33}, V_1, V_2, V_3)^\top \in \mathbb{R}^{12},$$

y

$$\begin{aligned} f^1(u) &= -(V_1, V_2, V_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sigma(U)_{11}, \sigma(U)_{21}, \sigma(U)_{31})^\top \\ f^2(u) &= -(0, 0, 0, V_1, V_2, V_3, 0, 0, 0, \sigma(U)_{12}, \sigma(U)_{22}, \sigma(U)_{32})^\top \\ f^3(u) &= -(0, 0, 0, 0, 0, 0, V_1, V_2, V_3, \sigma(U)_{13}, \sigma(U)_{23}, \sigma(U)_{33})^\top. \end{aligned}$$

Tenemos, además, una restricción física pues dado que por la definición de U , las derivadas mixtas de X deben ser iguales, es decir,

$$\partial_{x_k} U_{ij} = \partial_{x_j} U_{ik},$$

para todas $i, j, k = 1, 2, 3$. En forma abreviada escribimos

$$\operatorname{curl} U = 0.$$

Una excelente referencia para teoría de elasticidad es el texto de Ciarlet [1]. Para modelos más generales de medios continuos y un tratamiento un tanto más matemático ver el libro de Dafermos [3].

1.3.6. *Ecuaciones de Maxwell.* Las ecuaciones de Maxwell en el vacío con permisividades magnética y eléctrica, $\mu_0 = \epsilon_0 = 1$ tienen la siguiente forma

$$\vec{B}_t + \nabla \times \vec{E} = 0, \quad (\text{ley de Faraday}), \quad (22)$$

$$\vec{E}_t - \nabla \times \vec{B} = \vec{J}, \quad (\text{ley de Ampère}), \quad (23)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho, \quad (\text{ley de Gauss}), \quad (24)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{ley de Gauss magnética}). \quad (25)$$

Aquí tenemos que,

$$\vec{E} = \text{campo eléctrico},$$

$$\vec{B} = \text{campo magnético},$$

$$\vec{J} = \text{corriente eléctrica},$$

son campos vectoriales en tres dimensiones. Este sistema no tiene forma de ley de conservación. Sin embargo, podemos escribir las ecuaciones de evolución (a saber, las leyes de Faraday y de Ampère) como un sistema de leyes de balance de la forma

$$u_t + \text{div } F(u) = J,$$

donde u está dado por

$$u = (B_1, B_2, B_3, E_1, E_2, E_3)^T \in \mathbb{R}^6,$$

con flujos,

$$F(u) = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 \\ -E_3 & 0 & E_1 \\ E_2 & -E_1 & 0 \\ 0 & -B_3 & B_2 \\ B_3 & 0 & -B_1 \\ -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$$

y “datos”,

$$J = (0, 0, 0, J_1, J_2, J_3)^T \in \mathbb{R}^6.$$

Las leyes de Gauss en forma de divergencia, que no involucran derivadas temporales, cierran el sistema como constricciones a los campos. Notemos que estas ecuaciones son *lineales*, ya que los flujos F son funciones lineales de las variables de estado.

Como referencia ver el libro de Jackson [5].

1.3.7. *Magnetohidrodinámica (MHD).* El siguiente ejemplo modela el movimiento de un fluido en presencia de un campo electromagnético. Se asume que dicho campo electromagnético ejerce una fuerza sobre el fluido, de tal manera que la aceleración se ve afectada por el campo. Igualmente el movimiento mismo del fluido contribuye a la evolución del campo.

El sistema tiene la siguiente forma:

$$\rho_t + \sum_{j=1}^3 (\rho v_j)_{x_j} = 0 \quad (26)$$

$$(\rho v_i)_t + \operatorname{div}(\rho v_i v) + (p + \frac{1}{2}|\vec{B}|^2)_{x_i} - \operatorname{div}(B_i \vec{B}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (27)$$

$$(\frac{1}{2}\rho|v|^2 + \rho e + \frac{1}{2}|\vec{B}|^2)_t + \operatorname{div}(\frac{1}{2}v\rho|v|^2 + v\rho e + p v + \vec{E} \times \vec{B}) = 0, \quad (28)$$

$$\vec{B}_t + \nabla \times \vec{E} = 0, \quad (29)$$

donde, al igual que en las ecuaciones de Euler, tenemos

ρ = densidad de masa,

$\mathbb{R}^3 \ni v$ = velocidad,

$e + \frac{1}{2}|v|^2$ = densidad de energía total,

e = densidad de energía interna,

p = presión, $p = \hat{p}(\rho, e)$,

$\mathbb{R}^3 \ni \vec{B}$ = campo magnético,

$\mathbb{R}^3 \ni \vec{E}$ = campo eléctrico.

Las ecuaciones (26), (27), (28) y (29) representan conservación de masa, momento, energía y la ley de Faraday, respectivamente.

Este sistema está complementado por dos leyes “constitutivas”. Por un lado tenemos la ecuación de estado del fluido, $p = \hat{p}(\rho, e)$, y la ley aproximada $\vec{E} = \vec{B} \times v$, la cual es una aproximación a equilibrio local, ya que $\vec{E} + v \times \vec{B} \approx 0$ si la velocidad es pequeña. Claramente, este sistema de ecuaciones representa un sistema de leyes de conservación con cantidades conservadas

$$u = \left(\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, \rho(\frac{1}{2}|v|^2 + e) + \frac{1}{2}|\vec{B}|^2, B_1, B_2, B_3 \right)^T \in \mathbb{R}^8,$$

donde B_j es la componente j de \vec{B} , y flujos,

$$f^j(u) = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j + (p + \frac{1}{2}|\vec{B}|^2)\delta_1^j + B_1 B_j \\ \rho v_2 v_j + (p + \frac{1}{2}|\vec{B}|^2)\delta_2^j + B_2 B_j \\ \rho v_3 v_j + (p + \frac{1}{2}|\vec{B}|^2)\delta_3^j + B_3 B_j \\ \rho v_j(\frac{1}{2}|v|^2 + e) + p v_j + (\vec{E} \times \vec{B})_j \\ (\nabla \times \vec{E})_1 \\ (\nabla \times \vec{E})_2 \\ (\nabla \times \vec{E})_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^8,$$

para cada $j = 1, 2, 3$, donde δ_i^k es la delta de Kronecker, y $(\nabla \times \vec{E})_i$ es la componente i del rotacional de \vec{E} .

Como referencia, consultar el libro de Serre [9].

BIBLIOGRAFÍA

- [1] P. G. CIARLET, *Mathematical elasticity. Vol. I: Three-dimensional elasticity*, vol. 20 of Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988.
- [2] R. COURANT AND K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Wiley Interscience, New York, 1948.

- [3] C. M. DAFERMOS, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, vol. 325 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin, second ed., 2005.
- [4] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [5] J. D. JACKSON, *Classical electrodynamics*, John Wiley & Sons Inc., New York, second ed., 1975.
- [6] R. S. JOHNSON, *A modern introduction to the mathematical theory of water waves*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [7] P. D. LAX, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, no. 11 in CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1973.
- [8] R. J. LEVEQUE, *Numerical methods for conservation laws*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, second ed., 1992.
- [9] D. SERRE, *Systems of Conservation Laws I: Hyperbolicity, entropies, shock waves*, Cambridge University Press, 1999.
- [10] J. SMOLLER, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York, Second ed., 1994.
- [11] G. B. WHITHAM, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons, New York, 1974.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y MECÁNICA, IIMAS-UNAM, APDO. POSTAL 20-726, C.P. 01000 MÉXICO D.F. (MÉXICO)

E-mail address: plaza@mym.iimas.unam.mx