Ecuaciones Diferenciales Parciales II
Tarea 3: Problemas elípticos

1. Escribe la formulación débil (o variacional) del problema elíptico:

$$\begin{aligned} (1+x^2)u'' - xu' &= \sin(2\pi x), \qquad x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

en el espacio $H_0^1(\Omega)$ con $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Demuestra que éste problema tiene una única solución débil $u \in H_0^1(0,1)$. (*Sugerencia*: Para demostrar que la forma bilineal asociada satisface las hipótesis del teorema de Lax-Milgram puedes suponer como cierta la desigualdad de Poincarè en $H_0^1(0,1)$:

$$\|u\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{\pi}\|u'\|_{L^2(0,1)}, \qquad \forall\, u \in H_0^1(0,1).$$

La constante $C = 1/\pi$ es óptima y se demuestra con series de Fourier.)

2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, acotado y abierto. Sea el operador uniformemente elíptico

$$Lu = -\sum_{i,j}(a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + c(x)u.$$

Demuestra la existencia de una constante $\mu > 0$ tal que: si $c(x) \geq -\mu$ para todo $x \in \Omega$, entonces la forma bilineal correspondiente, $B[\cdot,\cdot]$, satisface las hipótesis del teorema de Lax-Milgram.

3. Considera el problema

$$\begin{aligned} -a\Delta u_1 &= f, \qquad \text{en } \Omega_1, \\ -b\Delta u_2 &= f, \qquad \text{en } \Omega_2, \end{aligned}$$

donde $0 < a < b$ son constantes, con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u_2 &= 0, \qquad \text{sobre } \partial\Omega, \\ u_1 &= u_2, \qquad \text{sobre } \partial\Omega_1, \\ a\frac{\partial u_1}{\partial n_1} &= b\frac{\partial u_2}{\partial n_2}, \quad \text{sobre } \partial\Omega_1, \end{aligned}$$

con $\Omega = \overline{\Omega}_1 \cup \Omega_2$, y $\Omega_1 \subset\subset \Omega$, abiertos, y $f \in L^2(\Omega)$. (n_j es normal unitaria exterior, y $n_1 = -n_2$ sobre $\partial\Omega_1$.)

(a) Encuentra la forma bilineal asociada, $B[\cdot,\cdot]$, para plantear el problema de encontrar una solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaga

$$u = \begin{cases} u_1, & \text{en } \Omega_1, \\ u_2, & \text{en } \Omega_2 \end{cases},$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{sobre } \partial\Omega_1.$$

Sugerencia: Calcula

$$-\int_{\Omega_1} av\Delta u\,dx - \int_{\Omega_1} bv\Delta u\,dx.$$

(b) Verifica que $B[\cdot,\cdot]$ satisface las hipótesis del teorema de Lax-Milgram. (*Sugerencia:* Aplica la desigualdad de Poincaré en $H_0^1(\Omega)$: $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^2(\Omega)}$.)

(c) Concluye que el problema tiene una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ para cada $f \in L^2(\Omega)$.

4. Considera el siguiente subespacio de $H^1(\Omega)$:

$$\mathcal{H} = \{u \in H^1(\Omega) \,:\, \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,dx = 0\}.$$

(a) Demuestra que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert con producto interno

$$\langle u, v\rangle_\nabla = \int_\Omega Du \cdot Dv\,dx.$$

(*Sugerencia:* Aplica la desigualdad de Poincaré vista en clase,

$$\|u - |\Omega|^{-1}\int_\Omega u\,dx\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

para demostrar que $\mathcal{H}$ es cerrado. Demuestra que $\mathcal{H}^\perp$ es el espacio de funciones constantes en $H^1(\Omega)$.)

(b) ¿Cuál es el problema con valores en la frontera cuya formulación débil en $\mathcal{H}$ está asociada a la forma bilineal

$$B[u,v] = \int_\Omega Du \cdot Dv\,dx = \langle u, v\rangle_\nabla,$$

es decir,
$$B[u,v] = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)},$$
con $f \in L^2(\Omega)$, para todo $v \in \mathcal{H}$? (*Sugerencia:* Como $\mathcal{H}$ es cerrado, escribe $H^1(\Omega) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp$. Integra por partes.)

(c) Demuestra que si $f \in L^2(\Omega)$ entonces el problema tiene una única solución débil $u \in \mathcal{H}$. (*Sugerencia:* Escribe
$$B[u,u] = \lambda\|Du\|_{L^2}^2 + (1-\lambda)\|Du\|_{L^2}^2,$$
para todo $\lambda > 0$, aplica Poincaré y escoge λ adecuadamente. Aplica Lax-Milgram.)

(d) Deduce que dos soluciones al problema
$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g, \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$
con $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\Omega)$, difieren sólo por una constante.

5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, acotado y abierto, con frontera suave. En clase se demostró que
$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \le C\big(\|Du\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Gamma |Tu|^2\, dS_x\big),$$
para todo $\Gamma \subset \partial\Omega$, con $|\Gamma| > 0$, donde T denota el operador de traza.

(a) Usa la desigualdad de traza anterior para demostrar que
$$\langle u, v\rangle_{1,\partial} := \int_{\partial\Omega} Tu\, Tv\, dS_x + \int_\Omega Du \cdot Dv\, dx, \qquad u, v \in H^1(\Omega),$$
es un producto interno en $H^1(\Omega)$, cuya norma asociada $\|\cdot\|_{1,\partial}$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

(b) Si $g \in$ rango $(T) = H^{1/2}(\Omega)$, definimos el espacio
$$\mathcal{X}_g := \{v \in H^1(\Omega) \,:\, Tv = g \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

Demuestra el siguiente teorema conocido como *principio de Dirichlet*: de todas las funciones $v \in \mathcal{X}_g$, la función armónica con valor g en la frontera (la cual es única), minimiza el funcional de Dirichlet

$$J[v] := \int_\Omega |Dv|^2 \, dx.$$

(*Sugerencia:* Minimizar $J(v)$ sobre $\mathcal{X}_g$ es equivalente a minimizar $\|v\|_{1,\partial}^2$ por la equivalencia probada en (a). Sea $u \in \mathcal{X}_g$ la función armónica en Ω. Si $v \in \mathcal{X}_g$ escribe $v = u + w$, con $w \in H_0^1(\Omega)$. Demuestra que $\langle u, w \rangle_{1,\partial} = 0$, y concluye que $\|u\|_{1,\partial}^2 \leq \|v\|_{1,\partial}^2$.)

6. *Alternativa de Fredholm.* Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio abierto, acotado, con frontera suave. (Por ejemplo, $\Omega = B_1(0)$.) Estudia la solvabilidad en sentido débil (en $H_0^1(\Omega)$) del problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u + f, && \text{en } \Omega, \\ u &= 0, && \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in L^2(\Omega)$. Examina, en particular, los casos $f = 0$ y $f = 1$. (*Sugerencia:* Analiza los casos $\lambda \in \Sigma(-\Delta)$ y $\lambda \notin \Sigma(-\Delta)$ separadamente. Aplica la alternativa de Fredholm y los teoremas de existencia demostrados en clase. Nota que el operador es autoadjunto.)

7. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, acotado y abierto, con frontera suave. Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ una solución de

$$Lu = -\sum_{i,j} a^{ij}(x) u_{x_i x_j} = 0, \qquad \text{en } \Omega,$$

donde L es uniformemente elíptico. Sea

$$v := |Du|^2 + \lambda u^2.$$

Demuestra que $Lv \leq 0$ en Ω si $\lambda > 0$ es suficientemente grande. Deduce la desigualdad

$$\|Du\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\big(\|Du\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\big).$$

Total: 70 pts.