Ecuaciones Diferenciales Parciales II
Tarea 2: Espacios de Sobolev

1. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, y $m \geq 0$. Demuestra que si $u \in H^m(\Omega)$ y $\alpha \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ entonces $\alpha u \in H_0^m(\Omega)$.

2. Integra por partes para demostrar la siguiente desigualdad de interpolación:
$$\int_\Omega |Du|^2\,dx \leq C\left(\int_\Omega |u|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |D^2u|^2\,dx\right)^{1/2},$$
para toda $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Por densidad, extiende la desigualdad a toda función $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

3. Integra por partes para demostrar que:
$$\int_\Omega |Du|^p\,dx \leq C\left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |D^2u|^p\,dx\right)^{1/2},$$
con $2 \leq p < \infty$, y para toda $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. (*Sugerencia:* usa la identidad $\int_\Omega |Du|^p\,dx = \sum_{j=1}^n \int_\Omega u_{x_j} u_{x_j} |Du|^{p-2}\,dx$.)

4. Encuentra una función en $W^{1,n}(\Omega)$ que no está en $L^\infty(\Omega)$. (*Sugerencia:* considera $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ y $u = \log\log(1 + 1/|x|)$.)

5. Aplica la desigualdad de Sobolev[1] para verificar que para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado con frontera $\partial\Omega \in C^1$, se cumple que $H^m(\Omega) \subset C^k(\Omega)$ si $m > k + n/2$. Encuentra un contrajemplo para $n = 2$, $m = 1$ y $k = 0$. (*Sugerencia:* Considera el disco en $\mathbb{R}^2$ con centro en el origen y radio $r = 1/e$, y la función $u = \log|\log\sqrt{x^2+y^2}|$. Demuestra que $u \in H^1(\Omega)$.)

6. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto y acotado. Demuestra que si $x_0 \in \Omega$, entonces $\delta(u) := u(x_0)$ para toda $u \in H^m(\Omega)$, define un elemento en el dual, es decir, $\delta \in H^{-m}(\Omega)$, si $m > n/2$. (Sugerencia: Aplica la desigualdad de Sobolev para verificar que $H^m(\Omega) \subset C^k(\Omega)$ si $m > k + n/2$.)

[1] es decir, $\|u\|_{C^k} \leq C\|u\|_{W^{m,p}}$ para toda $u \in W^{m,p}$ si $m > k + [n/2]$.

7. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado con frontera $\partial\Omega \in C^1$. Demuestra que

$$\ker T = H_0^1(\Omega),$$

donde $T : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ es el operador de traza. Demuestra que el rango de T, es decir, $H^{1/2}(\partial\Omega) := \text{rango}(T)$, es denso en $L^2(\partial\Omega)$.

8. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado con frontera $\partial\Omega \in C^1$ y orientable. Sea $\Gamma \subset \partial\Omega$ una porción de la frontera con superficie positiva,

$$|\Gamma| = \int_\Gamma dS_x > 0.$$

Demuestra que, para cada $g \in L^2(\Gamma)$, el mapeo

$$u \mapsto \int_\Gamma g(x)(Tu)(x)\, dS_x, \qquad u \in H^1(\Omega),$$

define un elemento del dual $H^{-1}(\Omega)$, donde $T : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ es el operador de traza.

Total: 80 pts.