

Ecuaciones Diferenciales Parciales II
Tarea 1: Teoría de distribuciones

1. Sea $s = s(x)$ la función “signo”:

$$s(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Demuestra que

$$\frac{d(|x|)}{dx} = s,$$

en sentido de distribuciones.

2. Evalúa, en sentido de distribuciones, las derivadas sucesivas de $|x|$.

3. Evalúa, en sentido de distribuciones, las derivadas sucesivas de orden $m = 1, 2, 3, 4$ de $|x| \sin x$ y de $|x| \cos x$.

4. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1/2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Demuestra que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

(b) Sea $l_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la distribución asociada a f . Demuestra que

$$\left\langle \frac{l_f}{dx}, \varphi \right\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{3/2}} dx,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Sugerencia: El problema se reduce a evaluar el límite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2 \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\varphi'(x)}{x^{1/2}} dx.$$

Integra por partes y escribe

$$\frac{2}{\sqrt{\epsilon}} \varphi(\epsilon) = \frac{2}{\sqrt{\epsilon}} (\varphi(\epsilon) - \varphi(0)) + \frac{2}{\sqrt{\epsilon}} \varphi(0).$$

5. Demuestra que $x^m \delta^{(k)} = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si $0 \leq k < m$.
6. En clase se demostró que si $l \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es tal que $xl = 0$, entonces $l = c_1 \delta$ con c_1 constante. Demuestra que si $x^2 l = 0$ entonces $l = -c_1 \delta' + c_2 \delta$, con c_1, c_2 constantes. Encuentra una fórmula general para $l \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si se cumple que $x^m l = 0$ para cierto $m \in \mathbb{N}$. (Ésta última se puede demostrar por inducción, pero no es necesario.)
7. Encuentra una distribución $l_F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, con $F(x) = H(x)f(x)$, donde H es la función de Heaviside y f una función de clase C^2 , tal que

$$\frac{d^2 l_F}{dx^2} + 4l_F = \delta, \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

8. Sea

$$u(x, t) = H(t) \frac{e^{-x^2/(4t)}}{2\sqrt{\pi t}}, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R},$$

donde $H = H(t)$ es la función de Heaviside en $t \in \mathbb{R}$. Evalúa, en sentido de distribuciones, $u_t - u_{xx}$.

9. Aproximaciones de δ .

- (a) Sea $B_r = B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$. Sea χ_{B_r} la función característica de la bola B_r :

$$\chi_{B_r}(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_r, \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Prueba que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\chi_{B_r}}{|B_r|} = \delta, \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

$|B_r|$ es el volumen de la bola de radio r en \mathbb{R}^n .

- (b) Sea $\eta_\epsilon = \eta_\epsilon(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, el alisador de Friedrichs:

$$\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \eta(|x|/\epsilon),$$

$$\eta(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

donde $C > 0$ es tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon dx = 1$. Demuestra que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \eta_\epsilon = \delta, \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

(c) Sea $\Psi = \Psi(x, t)$ la solución fundamental de la ecuación del calor:

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp(-|x|^2/4t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Para cada $t > 0$ fijo, Ψ define una distribución en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ que denotamos por $\Psi(\cdot, t)$. Demuestra que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \Psi(\cdot, t) = \delta, \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

10. Evalúa en sentido de distribuciones

$$\Delta \left(\log \frac{1}{|x|} \right), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

11. Sea $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3) \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^3)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto. Se define $\text{curl } \vec{l} \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^3)$ mediante la fórmula

$$\text{curl } \vec{l} = (\partial_{x_2} l_3 - \partial_{x_3} l_2, \partial_{x_3} l_1 - \partial_{x_1} l_3, \partial_{x_1} l_2 - \partial_{x_2} l_1).$$

Demuestra que, para todo $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^3)$,

$$\langle \text{curl } \vec{l}, \vec{\varphi} \rangle = \langle \vec{l}, \text{curl } \vec{\varphi} \rangle.$$

12. Demuestra que si $u_k \rightarrow u$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces $u_k \rightarrow u$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

13. Sabiendo que $\mathcal{F}(1) = \delta$, encuentra la transformada de Fourier de la distribución x^m , $m \geq 0$. Encuentra una fórmula para $\mathcal{F}(\delta^{(m)}(x))$.

14. *Demostración alternativa de que $\mathcal{F}(1) = \delta$.*

Vamos a dar por hecho que: si $l_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es tal que $\langle l_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle l, \varphi \rangle$ cuando $n \rightarrow +\infty$, entonces $l \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. (La demostración es parecida a la vista en clase para distribuciones en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.)

- (a) Demuestra que si $l_n \rightarrow l$ en \mathcal{S}'_x entonces $\mathcal{F}(l_n) \rightarrow \mathcal{F}(l)$ en \mathcal{S}'_ξ
 (b) Sea $l_n = l_{f_n} \in \mathcal{S}'_x$, donde

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq n, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Evalúa $\mathcal{F}(l_n)$.

- (c) Demuestra que $l_n \rightarrow 1$ en \mathcal{S}'_x
 (d) Prueba que $\mathcal{F}(l_n) \rightarrow \delta$ en \mathcal{S}'_ξ y concluye
15. Sean $H = H(x)$ y $s = s(x)$ la función de Heaviside y la función signo, respectivamente:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}, \quad s(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Demuestra que:

- (a) $\mathcal{F}(s(x)) = \frac{2}{i} \text{p.v.} \frac{1}{\xi} \in \mathcal{S}'_\xi$
 (b) $\mathcal{F}(H(x)) = \pi\delta + \frac{1}{i} \text{p.v.} \frac{1}{\xi} \in \mathcal{S}'_\xi$

Sugerencia: Observando que $ds/dx = 2\delta$ en \mathcal{S}'_x , transforma esta ecuación para obtener $\xi\mathcal{F}(s) = -2i$. Nota que todas las soluciones de $\xi l = 0$ en \mathcal{S}'_ξ son de la forma $l = c\delta$ con c constante (la demostración es la misma que en \mathcal{D}' , vista en clase). Añade una solución particular de $\xi l = 1$, que es $l_1 = \text{p.v.} \frac{1}{\xi}$, y recuerda que $\mathcal{F}(s)$ es impar mientras que δ es par para concluir (a). Finalmente, escribiendo $H(x) = \frac{1}{2}(1 + s(x))$ aplica (a) para obtener (b).

Total: 150 pts.