Ecuaciones Diferenciales Parciales II
Primer Examen Parcial: Distribuciones y espacios de Sobolev
Respuestas

1. Demuestra que si $l \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es una distribución tal que $xl = 0$, entonces $l = c_1\delta$ con c_1 constante.

Solución:
Primero demostramos que $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ es de la forma $\zeta = x\varphi$ con $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si y sólo si $\zeta(0) = 0$. En efecto, si $\zeta = x\varphi$ entonces claramente $\zeta(0) = 0$. Por otro lado, si $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ y $\zeta(0) = 0$, entonces definimos

$$\varphi(x) = \begin{cases} \zeta(x)/x, & x \neq 0, \\ \zeta'(0), & x = 0. \end{cases}$$

Claramente $\varphi \in C^\infty$ si $x \neq 0$. Por expansión de Taylor y $\zeta(0) = 0$ tenemos que $\zeta(x) = \zeta'(0)x + O(x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De este modo,

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \frac{\zeta(x)}{x^2} - \frac{\zeta'(0)}{x} = \frac{O(x^2)}{x^2} = O(1),$$

tiene un límite cuando $x \to 0$, es decir, $\varphi'(0)$ existe. Análogamente sabemos que $\varphi^{(m)}(0)$ existe para cada $m \in \mathbb{N}$ si y sólo si

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m \frac{x^m}{m!} + O(x^{m+1}),$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. En vista de que,

$$\varphi(x) = \frac{\zeta(x)}{x} = \zeta'(0) + \zeta''(0)\frac{x}{2} + \ldots + \zeta^{(m+1)}(0)\frac{x^m}{(m+1)!} + O(x^{m+1}),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $\varphi \in C^\infty$. Como ζ tiene soporte compacto, concluímos que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
Ahora tomemos cualquier $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\theta(0) = 1$. Para toda $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ se define

$$\zeta := \psi - \lambda\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad \text{con } \lambda = \psi(0).$$

Por lo tanto $\zeta(0) = 0$, y tiene la forma $\zeta = x\varphi$ para cierto $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. De este modo,

$$l(\psi) = l(\zeta + \lambda\theta) = l(\zeta) + \lambda l(\theta) = \langle l, x\varphi\rangle + \lambda\langle l, \theta\rangle = \underbrace{\langle xl, \varphi\rangle}_{=0} + \lambda\langle l, \theta\rangle = c_1\psi(0),$$

con $c_1 := \langle l, \theta\rangle$, constante. Por lo tanto $l(\psi) = c_1\psi(0)$ para todo $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, es decir, $l = c_1\delta$.

2. Integra por partes para demostrar la siguiente desigualdad de interpolación:

$$\int_\Omega |Du|^2\,dx \le C\left(\int_\Omega |u|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |D^2u|^2\,dx\right)^{1/2},$$

para toda $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Por densidad, extiende la desigualdad a toda función $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Solución: Sea $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Por la fórmula de Green (integración por partes),

$$\int_\Omega |Du|^2\,dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS_x - \int_\Omega u\Delta u\,dx = -\int_\Omega u\Delta u\,dx \le \left(\int_\Omega u^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |D^2u|^2\,dx\right)^{1/2},$$

ya que u tiene soporte compacto, y $|\Delta u|^2 \le |D^2u|^2$ a.e. Es decir,

$$\|Du\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|u\|_{L^2(\Omega)}\|D^2u\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \text{si } u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Ahora, si $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ entonces por densidad existe $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\|u_n - u\|_{H^2} \to 0$ si $n \to +\infty$. La convergencia tamién es en norma, ya que, por la desigualdad del triángulo, $|\|u_n\|_{H^2} - \|u\|_{H^2}| \le \|u_n - u\|_{H^2} \to 0$. Por lo tanto, $\|u_n\|_{H^2} \to \|u\|_{H^2}$. Tomando límites de cada lado de la desigualdad con u_n, obtenemos el resultado.