Ecuaciones Diferenciales Parciales

Semestre 2019-2

Tarea 4: Ecuación del calor

1. Considera el siguiente problema de Cauchy para la ecuación de Burgers viscosa:

$$\begin{aligned} v_t + v v_x &= v_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R},\, t > 0, \\ v(x,0) &= g(x), \qquad\qquad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $g \in C_0^2(\mathbb{R})$ es una función con soporte compacto. Encuentra una solución a este problema siguiendo los siguientes pasos:

(a) Suponiendo que $v \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ es solución de la ecuación de Burgers viscosa (1), considera

$$V(x,t) := \int_0^x v(y,t)\, dy.$$

Demuestra que V es solución de la ecuación

$$V_t + \tfrac{1}{2} V_x^2 = V_{xx} + c(t),$$

donde $c = c(t)$ es una constante de integración que depende de t.

(b) Demuestra que $U(x,t) := V(x,t) - \int_0^t c(s)\, ds$ satisface la ecuación

$$U_t + \tfrac{1}{2} U_x^2 = U_{xx},$$

y considera

$$w(x,t) := \exp\left(\frac{1}{2} U(x,t)\right). \tag{2}$$

Prueba que w es solución de la ecuación del calor.

(c) Encuentra la condición inicial apropiada para w y resuelve el problema global de Cauchy para w. Encuentra una solución para (1) aplicando la transfomación inversa.

Nota: El cambio de variables (2) es notable, pues reduce un problema no lineal a una ecuación lineal y se conoce como *transformación de Hopf-Cole*.

2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio abierto y acotado. Sea $g \in C(\overline{\Omega})$. Suponiendo que $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0,\infty) \cap C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ es solución de

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0, \qquad && \text{en } \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= g(x), && x \in \Omega, \\ u &= 0, && \text{sobre } \partial\Omega \times (0,\infty), \end{aligned}$$

demuestra que

$$\sup_{\Omega} |u(\cdot, t)| \leq C e^{-\mu t} \sup_{\Omega} |g|,$$

para cualquier $t > 0$, donde C y μ son constantes positivas que dependen únicamente de n y de Ω.

3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, con frontera suave. Supongamos que $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega \times [0,T])$, con $T > 0$. Si $u \in C^2(\Omega \times (0,T]) \cap C(\overline{\Omega} \times [0,T])$ es una solución del problema,

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= e^{-u}, && \text{en } \Omega \times (0,T], \\ u(\cdot, 0) &= f, && \text{en } \Omega, \\ u &= g, && \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \end{aligned}$$

demuestra que

$$-M \leq u \leq T e^M + M, \qquad \text{en } \Omega \times (0,T],$$

donde

$$M := \text{máx} \left\{ \text{máx}_{\Omega} |f|, \ \text{máx}_{\partial\Omega \times (0,T)} |g| \right\}.$$

4. Encuentra una solución explícita (escrita como una convolución) al siguiente problema:

$$\begin{aligned} u_t + u &= u_{xx} + 2u_x, && x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(x,0) &= \sin x, && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Demuestra que para cada $x \in \mathbb{R}$, fijo, $u(x,t) \to 0$ si $t \to +\infty$. *Sugerencia:* Encuentra un cambio de variables de la forma $u = v e^{\alpha x + \beta t}$ de modo que el problema se reduzca a resolver la ecuación del calor. Recuerda que

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi(x,t)\, dx = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/4t}\, dx = 1,$$

para cada $t > 0$, donde $\Psi(x,t)$ es la solución fundamental de la ecuación del calor.

5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado, abierto, con $\partial\Omega$ suave. Demuestra que si existe una solución $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T))$ con $T > 0$ fijo, de la solución a la ecuación del calor no homogénea con condiciones iniciales y de Neumann,

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= h(x,t), && x \in \Omega, \, t \in (0,T), \\ u(x,0) &= f(x), && x \in \Omega, \\ \nabla u \cdot \hat{n} = \frac{\partial u}{\partial n} &= g(t), && x \in \partial\Omega, \, t \in (0,T), \end{aligned}$$

entonces es única. (*Sugerencia:* Aplica el método de energía.)

6. Sea $g \in C(\mathbb{R}^n)$ una función uniformemente acotada. Suponiendo que $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ para cierto $T > 0$ fijo, arbitrario, es solución de

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0, \qquad && \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,T], \\ u(x,0) &= g(x), && x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

y suponiendo, además, que u y ∇u son acotadas en $\mathbb{R}^n \times (0,T]$, demuestra que

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(\cdot,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2t}} \sup_{\mathbb{R}^n} |g|,$$

para todo $0 < t \leq T$. *Sugerencia:* Sea $|g| \leq M$ en $\mathbb{R}^n$; considera entonces la función

$$w = u^2 + 2t|\nabla u|^2 - M^2.$$

Total: 6 pts.