Ecuaciones Diferenciales Parciales
Semestre 2019-2

Tarea 3: Ecuaciones de Laplace y de Poisson

1. Demuestra que la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ es invariante bajo rotaciones, es decir, si $O \in \mathbb{R}^n$ es una matriz de rotación (tal que $O^\top O = I$) y si definimos $w(x) := u(Ox)$, entonces $\Delta w = 0$ si y sólo si $\Delta u = 0$.

2. Sea u armónica en $\mathbb{R}^n$, tal que

$$\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \, dx \leq M < +\infty.$$

Demuestra que $u = 0$. (*Sugerencia:* Utiliza la segunda propiedad del promedio en una bola $B_R(x)$. Aplica la desigualdad de Schwarz y toma el límite cuando $R \to +\infty$.)

3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, y supongamos que $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ es solución de $\Delta u = u^3 - u$ en Ω, con $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Demuestra que $|u| \leq 1$ en $\overline{\Omega}$.

4. Demuestra el *teorema de Weyl*: suponiendo que $u \in C(\Omega)$ satisface

$$\int_\Omega u \Delta\varphi \, dx = 0,$$

para cualquier $\varphi \in C_0^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, entonces u es armónica en Ω.

5. Prueba la *segunda desigualdad de Harnack*: si u es armónica y no negativa en la bola $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, con $R > 0$, entonces para toda $x \in B_R(0)$,

$$\frac{R^{n-2}(R - |x|)}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R + |x|)}{(R - |x|)^{n-1}} u(0).$$

6. Sea $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, |x| < 1\}$. Demuestra que existe una constante positiva $C > 0$, que depende únicamente de la dimensión $n \geq 2$, tal que

$$\max_{B_1(0)} |u| \leq C \left(\max_{B_1(0)} |f| + \max_{\partial B_1(0)} |g| \right),$$

donde $f \in C(\overline{B_1(0)})$, $g \in C(\partial B_1(0))$ y u es la solución de

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \quad \text{en } B_1(0), \\ u &= g, \quad \text{en } \partial B_1(0). \end{aligned}$$

7. Sean

$$B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1\},$$
$$B_1^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1,\, y > 0\}.$$

Sea $u \in C^2(B_1^+) \cap C(\overline{B_1^+})$, armónica en B_1^+ y tal que $u(x,0) = 0$. Demuestra que la función

$$v(x,y) = \begin{cases} u(x,y), & y \geq 0, \\ -u(x,-y), & y < 0, \end{cases}$$

es armónica en B_1. A esto se le conoce como el *principio de reflexión de Schwarz.* (*Sugerencia:* Sea w la solución al problema $\Delta w = 0$ en B_1, $w = v$ en ∂B_1. Define $V(x,y) = w(x,y) + w(x,-y)$. Prueba que $V \equiv 0$.)

8. En dimensión $n = 2$:

(a) Encuentra la función de Green asociada al laplaciano en el dominio $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 < r < \sqrt{x^2 + y^2} < R\}$.

(b) Encuentra la función de Green asociada al laplaciano en el primer cuadrante, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0,\, y > 0\}$.

9. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, con $n \geq 2$. Sea $u \in C^2(\Omega)$, con $x \in \Omega$. Demuestra que

$$\Delta u(x) = \lim_{r \to 0^+} \frac{2n}{r^2} \left(\frac{1}{\omega_n} \int_{|\eta|=1} u(x + r\eta)\, dS_\eta \,-\, u(x) \right).$$

Nótese que esta fórmula implica la propiedad del promedio en caso de que la función sea armónica. (*Sugerencia:* Considera la expansión de Taylor de segundo orden alrededor de x.)

10. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto y conexo. Sea u armónica en Ω. Suponiendo que $R > 0$ es tal que $B_R(x_0) \subset \Omega$, sean $0 < a \leq b \leq R$ con $b^2 = aR$. Demuestra que

$$\int_{|\eta|=1} u(x_0 + a\eta) u(x_0 + R\eta)\, dS_\eta = \int_{|\eta|=1} u(x_0 + b\eta)^2\, dS_\eta.$$

Concluye que si u es constante en una vecindad entonces es idénticamente constante en todo Ω. (*Sugerencia:* Sea la función

$$\xi(r_1, r_2) = \int_{|\eta|=1} u(x_0 + r_1\eta) u(x_0 + r_2\eta)\, dS_\eta,$$

definida en $(r_1, r_2) \in (0, R] \times (0, R]$. Demuestra, usando la identidad de Green y la armonicidad de u, que la función $h(\lambda, \rho) = \xi(\lambda\rho, \lambda^{-1}\rho)$, con $0 < \rho < R$ y $\rho/R < \lambda < R/\rho$ es independiente de λ. Usa esto para verificar que $\xi(b,b) = \xi(a,R)$.)

Total: 12 pts.