

**Ecuaciones Diferenciales Parciales**  
**Semestre 2019-2**

**Tarea 2: Ecuación de onda**

1. Sean  $v$  y  $u$  dos soluciones de la ecuación de onda homogénea,

$$\square u := u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

(a) Prueba que  $\square(u_t v_t + c^2 u_x v_x) = 0$ .

(b) Suponiendo que  $u$  es solución de  $\square u = 0$  en  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ , con condiciones

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones de clase  $C^1$  y de *soporte compacto* (es decir,  $f = g \equiv 0$  fuera de un conjunto compacto en  $\mathbb{R}$ ), entonces demuestra que la *energía total*,

$$E(t) = E_{\text{cin}}(t) + E_{\text{pot}}(t),$$

es constante en  $t$ , donde las energías cinética y potencial son

$$E_{\text{cin}}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2(x, t) dx, \quad \text{y} \quad E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} c^2 u_x^2(x, t) dx,$$

respectivamente. (*Sugerencia:* Usa (a) para calcular  $dE/dt$ . Aplica la fórmula de d'Alembert y el hecho de que  $f, g$  y todas sus derivadas se anulan fuera de un conjunto compacto.)

(c) Bajo las mismas hipótesis que en (b) demuestra el principio de *equipartición de la energía*: existe  $T > 0$  tal que  $E_{\text{cin}}(t) = E_{\text{pot}}(t)$  para todo  $t \geq T$ .

2. Aplicando el principio de Duhamel, resuelve el siguiente problema no homogéneo

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= x^2, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ u(x, 0) &= x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. Estudiar el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 1, & x \geq 0, t \geq 0, \\ u(x, 0) &= 0, & x \geq 0, \\ u_t(x, 0) &= 0, & x \geq 0, \\ (u_t + \beta u_x)(0, t) &= 0, & t \geq 0, \end{aligned}$$

donde  $\beta \in \mathbb{R}$  es constante. Suponiendo que  $\beta \neq 0$ ,  $\beta \neq c$ , usa la identidad de Green-Lagrange para determinar la solución en las regiones  $x > ct \geq 0$  y  $0 \leq x \leq ct$ . Prueba que la solución encontrada es única, usando la identidad de Green-Lagrange o mediante el método de energía. ¿Qué pasa si  $\beta = 0$ ? ¿Qué pasa si  $\beta = c$ ?

4. Resuelve el siguiente problema para una cuerda semi-infinita con un extremo fijo:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t &= 0, & x > 0, \\ u(0, t) &= 0, & t \geq 0, \end{aligned}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x - 4), & |x - 4| \leq \pi/2, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

5 (Modelo con fricción interna). Considera el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - \tau u_{xx} &= \gamma u_{xxt}, & x \in [0, L], t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad t(x, 0) &= g(x), & x \in [0, L], \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0, & t > 0, \end{aligned} \tag{1}$$

donde  $\rho$ ,  $\tau$  y  $\gamma$  son constantes positivas.

(a) Define

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho u_t^2 + \tau u_x^2) dx, \quad t > 0.$$

Suponiendo que  $u$  es suficientemente suave (por ejemplo, de clase  $C^3$ ), demuestra que  $dE/dt \leq 0$  para todo  $t > 0$ . Interpreta el resultado.

(b) Usa (a) para demostrar que si existe una solución suficientemente suave al problema (1) entonces ésta es única.

(c) Usando separación de variables determina si  $u(x, t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Interpreta tu resultado.

6. Resuelve la ecuación de onda homogénea

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0,$$

en  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $t > 0$  con condiciones iniciales  $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = x_2$ . Verifica que la solución es correcta.

7. Encuentra la solución a

$$u_{tt} - (u_{xx} + u_{yy}) = 0,$$

donde  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \geq 0$ , con condiciones iniciales

$$u|_{t=0} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad u_t|_{t=0} = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

8. Sea  $u$  la solución de  $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ , para  $x \in \mathbb{R}^3$  y  $t > 0$ , con datos iniciales  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u_t(x, 0) = g(x)$ . Suponiendo que  $f$  y  $g$  están soportadas en la esfera compacta de radio  $\rho_0 > 0$  y centro en  $x = 0$ ,  $\bar{B}_{\rho_0}(0)$ , describe el soporte de la solución  $u$  para todo  $t > 0$ .

9. Considera la ecuación de onda en  $\mathbb{R}^3$ ,

$$u_{tt} - c^2 \Delta_x u = 0,$$

con  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ .

- (a) Demuestra que la solución general *con simetría esférica* (es decir,  $u = u(r, t)$ , con  $r = |x|$ ) tiene la forma

$$u = \frac{1}{r} (F(r + ct) + G(r - ct)).$$

- (b) Prueba que si los datos iniciales son  $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = g(r)$ , donde  $g$  es una función par de su argumento, entonces la solución es

$$u(r, t) = \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} \rho g(\rho) d\rho.$$

- (c) Si  $g$  está dada por

$$g(r) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 < r < a, \\ 0, & \text{para } r > a, \end{cases}$$

con  $a > 0$ , encuentra explícitamente, usando el inciso anterior, la solución  $u$  en las diferentes regiones acotadas por los conos  $r = a \pm ct$  en el espacio-tiempo. Prueba que  $u$  es discontinua en  $(0, a/c)$  (esto se debe al fenómeno de “focalización” de la discontinuidad de  $u_t$  en  $t = 0$ ,  $|x| = a$ ).

10. Considera el problema

$$u_{tt} - \Delta u = 1,$$

donde  $u = u(x, y, z, t)$  (es decir, en  $\mathbb{R}^3$ ), con condiciones iniciales

$$u|_{t=0} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad u_t|_{t=0} = x^2 + y^2 + z^2.$$

- (a) Expresa el laplaciano en coordenadas esféricas

$$(x, y, z) = (r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta),$$

donde  $r \geq 0$ ,  $\theta \in [0, \pi)$ ,  $\phi \in [0, 2\pi)$ .

- (b) Encuentra una solución que sólo dependa de  $r = |\bar{x}|$ ,  $\bar{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . (*Sugerencia:* Reducir el problema a la ecuación de onda no homogénea en una dimensión para  $r > 0$ ,  $t > 0$ . Aplica la identidad de Green-Lagrange y analiza los casos  $r \geq t$  y  $r < t$ .)

- (c) Discute la diferenciabilidad de la solución en la curva  $t = |\bar{x}|$ .

- (d) Encuentra la solución del problema directamente: primero encuentra *una* solución a

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_x u &= 1, \\ u|_{t=0} &= u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

(*Sugerencia:* Usar el principio de Duhamel.) Después calcula la solución a

$$\begin{aligned}u_{tt} - \Delta_x u &= 0, \\u|_{t=0} &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\u_t|_{t=0} &= x^2 + y^2 + z^2,\end{aligned}$$

usando la fórmula de Kirchhoff y calculando las integrales de superficie. La suma de la solución particular y la solución de la homogénea debe ser, por unicidad, idéntica a la solución obtenida en el inciso (b).

Total: 10 pts.