Ecuaciones Diferenciales Parciales.
Tarea 1: Ecuaciones de primer orden.

Semestre 2017-2

1. Considera la ecuación lineal de primer orden

$$yu_x + xu_y = 0,$$

con datos

$$u(x,0) = f(x),$$
$$u(0,y) = g(y).$$

f y g son conocidas, de clase C^1 y satisfacen $f(0) = g(0)$. Determina las curvas características y prueba que cualquier solución es constante a lo largo de las características. Usa este hecho para dar una fórmula explícita para la solución general en las regiones (i) $x = \pm y$, (ii) $y^2 - x^2 > 0$, y (iii) $x^2 - y^2 > 0$. Verifica que la solución satisface, en efecto, la ecuación y las condiciones iniciales, y que es continua en todo el plano.

2. Estudia las características y la solución de la ecuación lineal

$$yu_x - xu_y = 1,$$
$$u(x,0) = 0.$$

Estudia la transformación $(s,\xi) \mapsto (x,y)$. ¿Cuándo es invertible? Si el dato inicial es

$$u(x,0) = f(x),$$

y la solución $u = u(x,y)$ es continua en $x = 0$, ¿qué se puede decir de la función $f(x)$? ¿Y de $f(0)$?

3. Considera la ecuación

$$uu_x + yu_y = x,$$

y la curva inicial $\mathcal{I} = \{(\tilde{x},\tilde{y})(\xi) = (\xi,\xi) \,:\, \xi > 0\}$. Determina si para los siguientes datos iniciales existe una única solución de clase C^1, o no hay solución diferenciable, o bien existe una infinidad de soluciones de clase C^1, en una vecindad de la curva inicial:

(a) $u = 2\xi$ sobre $\mathcal{I}$.

(b) $u = \xi$ sobre $\mathcal{I}$.

(c) $u = \sin((\pi/2)\xi)$ sobre $\mathcal{I}$.

4. Considera el problema de Cauchy:

$$yu_x + xu_y = 0,$$
$$u(e^\xi, e^\xi) = \tfrac{1}{2}\xi^2, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Demuestra que no existe solución de clase C^1 en ninguna vecindad del punto $(1,1,0)$. (*Sugerencia:* ¿Se cumple la condición de colinealidad de $(a,b,c)^\top$ y $(\tilde{x}',\tilde{y}',f')^\top$ en un solo punto? ¿Se cumple la condición de transversalidad?)

5. Considera el siguiente problema de Cauchy:

$$uu_x + u_y = 1,$$
$$u(\xi - \xi^2, \xi) = \xi,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$. ¿Existe alguna solución de clase C^1 en una vecindad del punto $(2/9, 1/3, 1/3)$? Explica tu respuesta.

6. Resuelve la ecuación completamente no lineal,

$$xu_x + yu_y + u_x u_y - u = 0,$$

con condición $u(x,-x) = 1$. ¿Es la solución única? ¿Es global?

7. Encuentra una solución a la ecuación

$$u_x^2 + u_y^2 = 4u,$$

con datos iniciales $u(\xi,-1) = \xi^2$, $\xi \in \mathbb{R}$. ¿Es única la solución? Justifica tu respuesta. Si no es única, encuentra, por lo menos, otra solución al mismo problema.

8. (Partícula clásica en una dimensión con potencial lineal.) Sea una partícula clásica de masa $m > 0$ en una dimensión, sujeta a un potencial lineal de la forma $V = V(x) = kx$, con $k > 0$ constante. El lagrangiano se define mediante

$$L(y,z) = \tfrac{1}{2}mz^2 - ky, \qquad y, z \in \mathbb{R}.$$

(a) Encuentra el momento generalizado $q = Q(y,p)$ y el hamiltoniano asociado $H = H(y,p)$.

(b) Demuestra que la ecuación de Hamilton-Jacobi para la función geodésica es

$$u_t + \frac{1}{2m}u_x^2 + kx = 0.$$

(c) Resuelve la ecuación de Hamilton-Jacobi con condición inicial de la forma $u(x,0) = f(x)$ en términos de la posición x y del momento p/m.

9. Considera el siguiente problema:

$$\rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$$\rho(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Encuentra una solución débil y entrópica para todo tiempo $t > 0$. Escribe la solución explícitamente. ¿Porqué es entrópica? (*Sugerencia:* Dado que la función de flujo es cóncava, las discontinuidades de $\rho(0,x)$ en $x = 0$ y en $x = 1$ dan lugar a una onda de choque y a una onda de rarefacción, respectivamente. Observa que el factor integrante de una ecuación de la forma $y'(t) + ay(t) = f$ es $\mu(t) = \exp(\int^t a(s)\,ds)$. Tendrás que resolver una ecuación de esta forma para la segunda onda de choque que se genera.) Interpreta la respuesta en términos de flujo de tráfico.

10. Resuelve la ecuación de Burgers

$$u_t + \left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x = 0,$$

con condición inicial

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0, \\ 1-x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \ge 1. \end{cases}$$

Prueba que la solución clásica existe hasta un tiempo finito de rompimiento $T_* > 0$ y encuentra su forma explícita. Calcula $T_* > 0$. Analizando las características, escribe una solución explícita a partir del tiempo $T_* > 0$ en forma de una onda discontinua. Prueba que dicha solución satisface la condición de entropía de Lax.

Total: 10 pts.