Ecuaciones Diferenciales Parciales

Examen de diagnóstico

Instrucciones: Resuelve los siguientes problemas. El tiempo es de una hora.

1. Sea $u \in C^2(\bar{D})$ la solución de $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ en el disco unitario en el plano $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, con condición de frontera $u(\cos\theta, \sin\theta) = 3\sin 2\theta$. Sin resolver la ecuación:

   (a) ¿Cuál es el máximo de la función u en la cerradura del disco $\bar{D} = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$?

   (b) ¿Cuál es el valor de u en $(x, y) = (0, 0)$?

2. Encuentra la solución al problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x, 0) &= x, \\ u_t(x, 0) &= 1. \end{aligned}$$

3. Considera la ecuación del calor en un intervalo:

$$u_t - u_{xx} = 0, \qquad x \in [0, 1],\ t > 0. \tag{1}$$

   Sea $u_1 = u_1(x, t)$ la solución a (1) con los siguientes datos iniciales y de frontera:

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= x, \\ u_1(0, t) &= 1, \\ u_1(1, t) &= t. \end{aligned}$$

   Sea $u_2 = u_2(x, t)$ la solución a (1) con los siguientes datos iniciales y de frontera:

$$\begin{aligned} u_2(x, 0) &= 2x, \\ u_2(0, t) &= 2, \\ u_2(1, t) &= 2t. \end{aligned}$$

   Explica porqué $u_1(x, t) \leq u_2(x, t)$ *para todo* $(x, t) \in [0, 1] \times [0, +\infty)$.

4. El siguiente problema con condiciones en la frontera, ¿tiene solución $u \in C^2(\bar{D})$? Explica tu respuesta sin resolver la ecuación.

$$\begin{aligned} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} &= 0, \qquad \text{en } D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \nabla \cdot \hat{n} &= 1, \qquad \text{sobre } \partial D, \end{aligned}$$

   donde $D = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) : \theta \in [0, 2\pi),\ 0 \leq r < 1\}$ es el disco unitario en el plano, $\partial D = \{(\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in [0, 2\pi)\}$ es su frontera, y $\hat{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$ es el vector normal unitario a la misma.