Facultad de Ciencias, UNAM Dr. Ramón G. Plaza
Semestre 2009-II

Ecuaciones Diferenciales I - Tarea 9

Fecha de entrega: 1o. de junio, 2009.

1. (1 pt.) Aplica el teorema de Picard para demostrar que $y(t) = -1$ es la única solución al problema de valores iniciales

$$y' = t(1+y), \qquad y(0) = -1.$$

2. (1 pt.) Encuentra una solución no trivial (es decir, no idénticamente cero) al problema de valores iniciales

$$y' = ty^{\alpha}, \qquad y(0) = 0,$$

donde $\alpha > 1$ es constante. ¿Tu resultado contradice el teorma de Picard en una vecindad de $t = 0$? Explica tu respuesta.

3. (2 pts.) Considera el problema de valores inciiales

$$y' = t^2 + y^2, \qquad y(0) = 0,$$

y sea R el rectángulo

$$R = \{(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, |t| < a,\, |y| < b\},$$

donde $a, b > 0$.

   (a) Prueba que la solución existe y es única para $|t| < \min\{a, b/(a^2+b^2)\}$.
   (b) Prueba que el valor mínimo de $b/(a^2+b^2)$ para a fijo es $1/(2a)$.
   (c) Prueba que $\alpha = \min\{a, \frac{1}{2}a\}$ es máximo cuando $a = 1/\sqrt{2}$.
   (d) Conclude que la solución existe para todo $0 \le t \le 1/\sqrt{2}$.

4. (2 pts.) Para cualquier condición inicial $y(t_0) = y_0$, prueba que la solución a

$$t^3 + yy' = 0,$$

existe, es única, y está definida para toda $t \in \mathbb{R}$. (*Hint:* Encuentra una cota *a priori* para $|y(t)|$.)

5. (2 pts.) Prueba que la solución a

$$\sin y + 5y + 2y'' = 0,$$

existe para toda $t \in \mathbb{R}$, para cualquier conjunto de condiciones inciiales $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = v_0$. (*Hint:* Encuentra una cota *a priori* para $|y(t)|$ y $|y'(t)|$.)

6. (2 pts.) Considera la ecuación del péndulo simple ideal

$$\theta'' + \sin\theta = 0,$$

con condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = \omega_0$.

(a) Prueba que la energía total del sistema

$$E = \tfrac{1}{2}\theta'(t)^2 - \cos\theta(t),$$

es constante.

(b) Prueba que la solución existe para todo $t \in \mathbb{R}$. (*Hint:* Establece las cotas *a priori* para $|\theta'(t)|$ y $|\theta(t) - \theta_0|/t$. Define

$$\mathcal{D}_* = \{(t, \theta, \theta') \in \mathbb{R}^3 \, : \, |\theta - \theta_0| \leq 2T\sqrt{2E},\ |\theta'| \leq 2\sqrt{2E},\ |t| \leq T\},$$

con $T > 0$ arbitrario. Aplica el teorema visto en clase y concluye.)