

# SISTEMAS HIPERBÓLICOS DE LEYES DE CONSERVACIÓN

## LA FÓRMULA DE LAX-HOPF (SECCIÓN 2)

13/03/2025

RAMÓN G. PLAZA

### 1. EL TEOREMA DE LAX Y LA FÓRMULA DE LAX-HOPF

En esta sección vamos a demostrar un teorema debido a Lax [4], el cual asegura existencia y unicidad de la solución entrópica al problema de Cauchy con condición inicial acotada, en el caso en el que la función de flujo  $f$  es estrictamente convexa. Notablemente, la solución está determinada por una fórmula explícita que se conoce como la *fórmula de Lax-Hopf* [4, 5, 2]. A pesar de que la demostración no se puede extender al caso general no convexo, el método usado en esta sección es de gran interés pues revela rasgos importantes de las soluciones entrópicas, tales como el comportamiento asintótico para  $t$  grande.

Consideremos una ley de conservación escalar de la forma,

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (1)$$

en  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ , con condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (2)$$

donde  $u \in \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^2$ .

**Teorema 1.1** (Lax). *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  estrictamente convexa, de clase  $C^2$  que satisface*

$$f''(u) \geq \alpha > 0, \quad \text{para toda } u \in \mathbb{R},$$

$$f'(u) = a(u) \rightarrow \pm\infty, \quad \text{cuando } u \rightarrow \pm\infty.$$

*Sea la condición inicial  $u_0 \in L^\infty$  (acotada). Entonces el problema de Cauchy (1), (2) admite una única solución entrópica  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty); \mathbb{R})$ , que satisface la desigualdad*

$$f'(u(x_2, t)) - f'(u(x_1, t)) \leq \frac{x_2 - x_1}{t} \quad (3)$$

*para toda  $x_2 \geq x_1$  y toda  $t > 0$ . La solución entrópica está dada por la fórmula explícita*

$$u(x, t) = g\left(\frac{x - y(x, t)}{t}\right), \quad (4)$$

*donde  $g = a^{-1}$  y  $y(x, t)$  es el valor único que minimiza la función*

$$y \mapsto G(x, t, y) = tf^*\left(\frac{x - y}{t}\right) + \int_0^y u_0(x) dx. \quad (5)$$

*Aquí,  $f^*$  denota la transformada de Legendre de  $f$  (véase apéndice A).*

**Observación 1.2.** La desigualdad (3) es una condición más general que la desigualdad de entropía de Oleñnik, ya que esta última se deduce a partir de (3). Si tomamos  $2C = 1/\min f'' > 0$ , por el teorema del valor medio tenemos que

$$\frac{a(u(x_2, t)) - a(u(x_1, t))}{x_2 - x_1} = \frac{f''(u_0)(u(x_2, t) - u(x_1, t))}{x_2 - x_1} \leq \frac{1}{t},$$

para cierto  $u_0$  entre  $u(x_1, t)$  y  $u(x_2, t)$ , y para todo  $x_2 > x_1$ ; esto implica que

$$u(x + \epsilon, t) - u(x, t) < \frac{C\epsilon}{t}, \quad (6)$$

para todo  $(x, t)$ , con  $t > 0$ , y todo  $\epsilon > 0$ , es decir, obtenemos la condición de entropía de Oleñnik.

**Observación 1.3.** En el caso de la ecuación de Burgers no viscosa tenemos  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$  y por lo tanto  $a(u) = u$  con inversa  $g(v) = v$ . De este modo  $f^*(u) = \frac{1}{2}u^2$  y la función (5) está dada por

$$G(x, t, y) = \frac{1}{2} \frac{(x - y)^2}{t} + \int_0^y u_0(x) dx.$$

La fórmula explícita (4) fue expresada por primera vez en el caso particular de flujo de Burgers por E. Hopf [2], razón por la cual la solución (4) recibe el nombre de fórmula de Lax-Hopf (o simplemente, fórmula de Lax).

**Observación 1.4.** La fórmula explícita de Lax-Hopf es posible gracias a que cuando la función de flujo es convexa, todas las características emanan de algún punto en el eje real cuando  $t = 0$ . En el caso general esto no es posible, ya que las características se pueden originar en una onda de choque sónica, es decir, cuando la velocidad coincide con una de las velocidades características,  $s = f'(u_L)$  o  $s = f'(u_R)$  (también llamada onda de choque característica). Existe, sin embargo, un caso en el que esto no ocurre para  $f$  arbitraria, que consiste en suponer que la condición inicial es monótona, lo cual implica que su primitiva es convexa. Esta notable observación se debe a Kunik [3] (para la demostración, véase Serre [6]):

**Proposición 1.5** (Kunik). Sea  $u_0 \in L^\infty$  monótonamente creciente, y sea  $f \in C^2$ . Entonces la solución entrópica al problema de Cauchy (1) - (2) está dada por  $u(x, t) = \partial_x H(x, t)$ , donde

$$H(x, t) = \sup_{y \in \mathbb{R}} (yx - tf(y) - U_0^*(y)),$$

$U_0$  es la primitiva (convexa) de  $u_0$ , y  $U_0^*$  denota a su transformada de Legendre.

## 2. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE LAX

La demostración del teorema 1.1 que presentamos aquí está dividida en tres partes. La primera parte consiste en verificar que la fórmula de Lax-Hopf es correcta en el caso particular de una solución de clase  $C^1$  por pedazos que, además, tiene soporte compacto en el espacio-tiempo. Aunque no es propiamente parte de la demostración, este paso es muy ilustrativo ya que nos permite entender desde un punto de vista geométrico (mediante una construcción con el método de características) de dónde proviene la fórmula (4). La segunda parte consiste en la demostración de la existencia de la solución de Lax-Hopf y la verificación de la condición de entropía. La tercera y última parte es la prueba de unicidad. Hacemos notar que esta demostración es esencialmente diferente al principio de contracción

en la norma  $L^1$  presentado en la clase pasada, el cual se aplica solamente a soluciones entrópicas de clase  $C^1$  por pedazos. La conclusión del teorema garantiza la unicidad de la solución de Lax-Hopf en la clase de todas las soluciones entrópicas de la ley de conservación.

**2.1. Representación para una solución  $u$  de clase  $C^1$  por pedazos.** Primero vamos a verificar que la fórmula de Lax (4) - (5) es válida en el caso de una solución de clase  $C^1$  por pedazos con soporte compacto, y que satisface, en cada una de sus discontinuidades, la desigualdad de entropía de Lax no estricta, es decir,

$$f'(u_R) \leq s \leq f'(u_L), \quad (7)$$

para todo punto  $P$  de cualquier discontinuidad  $\Sigma = \{(\hat{x}(t), t) : t \in (t_1, t_2)\}$  y donde  $s = d\hat{x}/dt$  es la velocidad de la discontinuidad en ese punto. Asumiendo que  $u(x, t)$  es una solución de este tipo, definimos

$$U(x, t) := \int_{-\infty}^x u(\zeta, t) d\zeta, \\ U_0(x) := U(x, 0).$$

Es posible normalizar la función de flujo<sup>1</sup>  $f$  tal que, sin pérdida de generalidad,  $f(0) = 0$ .

De este modo integramos la ecuación (1) (ya que  $u$  es de clase  $C^1$  por pedazos y la ley de conservación (1) se satisface c.d.s.), de tal manera que

$$0 = \int_{-\infty}^x u_t(y, t) + f(u)_y dy = \partial_t \int_{-\infty}^x u(y, t) dy + f(u(x, t)) - f(u(-\infty, t)).$$

Nótese que  $u(-\infty, t) \equiv 0$  para toda  $t \geq 0$ , ya que  $u$  es de soporte compacto y  $f(0) = 0$ ; por lo tanto,

$$U_t + f(U_x) = 0, \quad \text{c.d.s.} \quad (8)$$

En virtud de que  $f$  es estrictamente convexa, tenemos que para toda  $v \in \mathbb{R}$  se cumple la siguiente desigualdad  $f(U_x) \geq a(v)(U_x - v) + f(v)$ , y por ende,

$$U_t + a(v)U_x \leq va(v) - f(v), \quad \text{para toda } v \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Fijemos  $v \in \mathbb{R}$ . Para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  dados, consideremos la característica que pasa por  $(x, t)$  con pendiente  $a(v)$  y que interseca al eje  $t = 0$  en el punto  $y(x, t) = x - a(v)t$ . Esta característica se puede parametrizar de la siguiente manera,

$$\Gamma_{(x,t)} = \{(\xi(\sigma), \sigma) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) : \xi(\sigma) = a(v)\sigma + y(x, t) = a(v)(\sigma - t) + x\}.$$

Integremos (9) a lo largo de  $\Gamma_{(x,t)}$  para  $\sigma \in (0, t)$ ; obtenemos,

$$\int_0^t U_t(a(v)(\sigma - t) + x, \sigma) + a(v)U_x(a(v)(\sigma - t) + x, \sigma) d\sigma \leq t(va(v) - f(v)).$$

Derivando  $U$  con respecto a  $\sigma$  a lo largo de la característica, se tiene que

$$\frac{d}{d\sigma} U(\xi(\sigma), \sigma) = U_t(\xi(\sigma), \sigma) + a(v)U_x(\xi(\sigma), \sigma),$$

y, por lo tanto,

$$U(x, t) \leq U(y, 0) + t(va(v) - f(v)). \quad (10)$$

<sup>1</sup>Basta con redefinir  $f(u) \rightarrow f(u) - f(0)$ , conservando convexidad y regularidad.

Sea  $g$  la función inversa de  $a$ . Dado que  $(x - y)/t = a(v)$  obtenemos

$$v = g\left(\frac{x - y}{t}\right).$$

Sustituyendo en (10) llegamos a la desigualdad

$$\begin{aligned} U(x, t) &\leq U(y, 0) + t \left( \left( \frac{x - y}{t} \right) g\left(\frac{x - y}{t}\right) - f\left(g\left(\frac{x - y}{t}\right)\right) \right) \\ &= U(y, 0) + t f^*\left(\frac{x - y}{t}\right). \end{aligned}$$

Esta desigualdad se cumple para todo  $v \in \mathbb{R}$ , y dado que  $y(x, t) = x - a(v)t$ , también es cierta para toda  $y \in \mathbb{R}$ . De este modo hemos probado que

$$U(x, t) \leq U_0(y) + t f^*\left(\frac{x - y}{t}\right), \quad (11)$$

para toda  $y \in \mathbb{R}$ . En particular, para  $(x, t)$  dados, la desigualdad (11) se cumple para el valor  $\hat{y}(x, t)$  tal que

$$g\left(\frac{x - \hat{y}(x, t)}{t}\right) = u(x, t). \quad (12)$$

Este valor  $\hat{y}$  existe ya que  $g = a^{-1}$  y  $a$  es sobre. Otra manera de escribir (12) es

$$a(u(x, t))t = x - \hat{y}(x, t). \quad (13)$$

A continuación vamos a demostrar que dicho valor de  $\hat{y}$  minimiza el lado derecho de la desigualdad (11), la cual se cumple en forma de igualdad. La fórmula (13) nos sugiere considerar la característica con pendiente  $a(u(x, t))$  que pasa por  $(x, t)$ . Así, para  $(x, t)$  dado y fuera de una discontinuidad  $\Sigma$  de  $u$ , consideramos la característica

$$\xi(\sigma) = a(u(x, t))(\sigma - t) + x, \quad \sigma \in (0, t). \quad (14)$$

Dicha característica interseca el eje  $t = 0$  en el punto  $\xi(0) = \hat{y}(x, t)$  siempre y cuando no intersece a otra discontinuidad  $\Sigma'$  para tiempos menores a  $t > 0$ . Podemos garantizar esto ya que, por hipótesis,  $u$  es solución de clase  $C^1$  por pedazos que satisface la condición de entropía de Lax. En efecto, supongamos que  $(x, t)$  está fuera de una discontinuidad  $\Sigma$  y argumentando por contradicción, supongamos que si trazamos la característica hacia atrás en el tiempo, ésta interseca a una segunda discontinuidad  $\Sigma'$  (ver figura 1).

De este modo,  $u$  permanece constante a lo largo de la característica, la cual interseca al eje  $t = 0$  en el único punto  $\hat{y}(x, t)$ . Dado que  $U_x = u$ , tenemos para todo  $\sigma \in (0, t)$ ,

$$U_t(\xi(\sigma), \sigma) = -f(u(\xi(\sigma), \sigma)),$$

y  $u(x, t) = u(\xi(\sigma), \sigma)$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} U_t(\xi(\sigma), \sigma) + a(u(\xi(\sigma), \sigma))U_x(\xi(\sigma), \sigma) &= a(u(\xi(\sigma), \sigma))u(\xi(\sigma), \sigma) - f(u(\xi(\sigma), \sigma)) \\ &= a(u(x, t))u(x, t) - f(u(x, t)), \end{aligned}$$

para toda  $\sigma \in (0, t)$ . Integrando esta igualdad en  $\sigma \in (0, t)$  obtenemos

$$\begin{aligned} U(x, t) - U(\hat{y}(x, t), 0) &= \int_0^t \frac{d}{d\sigma} U(\xi(\sigma), \sigma) d\sigma \\ &= \int_0^t U_t(\xi(\sigma), \sigma) + a(u(\xi(\sigma), \sigma))U_x(\xi(\sigma), \sigma) d\sigma \\ &= \int_0^t a(u(x, t))u(x, t) - f(u(x, t)) d\sigma \\ &= t(a(u(x, t))u(x, t) - f(u(x, t))) \\ &= tf^* \left( \frac{x - \hat{y}(x, t)}{t} \right). \end{aligned}$$

Hemos probado que la desigualdad (11) se cumple en forma de igualdad para  $y = \hat{y}(x, t)$ , valor para el cual el lado derecho alcanza su mínimo, y adicionalmente tenemos la representación (12) para la solución  $u$ . Podemos concluir que la fórmula de Lax (4) - (5) es, por lo tanto, válida para una solución  $u$  de clase  $C^1$  por pedazos y con soporte compacto que satisface la condición de Lax en cada discontinuidad.

**2.2. Existencia.** El siguiente paso consiste en demostrar la parte de existencia del teorema de Lax. Dado que la condición inicial es acotada,  $u_0 \in L^\infty$ , podemos definir

$$U_0(y) := \int_0^y u_0(x) dx. \quad (15)$$

Nuevamente normalizamos  $f$  de modo que  $f(0) = 0$ . Dado que  $f$  es estrictamente convexa y  $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} f'(u) = \pm\infty$ , podemos definir, para todo  $(x, t)$  con  $t > 0$ , y  $y \in \mathbb{R}$ , la función

$$G(x, t, y) := U_0(y) + tf^* \left( \frac{x - y}{t} \right). \quad (16)$$

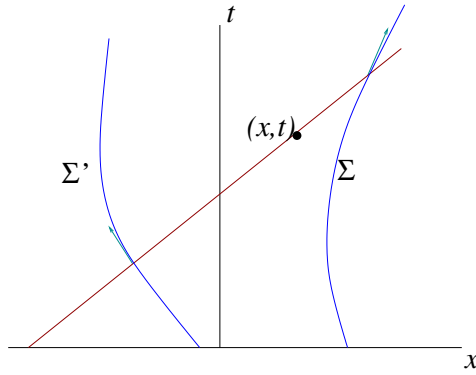


FIGURA 1. Si la solución  $u$  satisface la condición de Lax, entonces una característica con pendiente  $a(u(x, t))$  para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$  fijo y fuera de una discontinuidad  $\Sigma$ , no intersecciona a otra discontinuidad  $\Sigma'$  para tiempos menores a  $t > 0$ . En la gráfica, la discontinuidad viola la condición de Lax, pues la característica que “entra” en  $\Sigma$  aparenta “salir” de  $\Sigma'$ .

Notamos que la transformada de Legendre de  $f$  satisface

$$f^*(a(0)) = a(0)g(a(0)) - f(g(a(0))) = -f(0) = 0,$$

ya que  $g = a^{-1}$  y habiendo usado (43). Asimismo, en virtud de que  $df^*/dv = g(v)$  y de que  $f^*$  es estrictamente convexa, concluimos que  $f^*$  tiene un mínimo global en  $v = a(0)$  y por lo tanto

$$f^*(v) \geq 0, \quad f^*(v) \rightarrow +\infty \quad \text{cuando } |v| \rightarrow \infty.$$

Más aún,  $f^*$  crece más rápido que cualquier función lineal ya que

$$\lim_{v \rightarrow \pm\infty} df^*/dv = \lim_{v \rightarrow \pm\infty} g(v) = \pm\infty.$$

Por otro lado, el término  $\int_0^y u_0 dx$  crece, a lo más, linealmente, en virtud de que  $u_0$  es acotada. Por continuidad de  $G$  y las observaciones anteriores concluimos que para  $(x, t)$  fijo,

$$G(x, t, y) \rightarrow \infty \quad \text{cuando } y \rightarrow \pm\infty.$$

Esto implica que para  $(x, t)$  fijo  $G$  alcanza su mínimo en algún punto  $y = y(x, t)$ , el cual puede no ser único. Sea  $y(x, t)$  cualquiera de esos puntos que minimizan a  $G$ . Vamos a demostrar que el mapeo  $x \mapsto y(x, t)$  es no decreciente para todo  $t > 0$  fijo, lo cual es un corolario del siguiente

**Lema 2.1.** *Para  $x_1, x_2, y$   $t > 0$  dados, sean  $y_1$  y  $y_2$  dos valores para los cuales las funciones  $G(x_1, t, y)$  y  $G(x_2, t, y)$  alcanzan su mínimo, respectivamente. Si  $x_2 > x_1$  entonces  $y_2 \geq y_1$ .*

*Demostración.* Sea

$$H(s) := f^*(\sigma + s) - f^*(\sigma) + f^*(\tau - s) - f^*(\tau),$$

para  $\sigma < \tau$  fijos y cualquier  $s \in (0, \tau - \sigma)$ . Dado que  $f^*$  es estrictamente convexa tenemos que

$$\frac{f^*(\sigma + s) - f^*(\sigma)}{s} < \frac{f^*(\tau) - f^*(\tau - s)}{s}, \quad s \in (0, \tau - \sigma)$$

(ver figura 2). Esto implica que  $H(s) < 0$ . Notamos también que  $H(0) = 0$ , y que  $H(\tau - \sigma) = 0$ . Por lo tanto, bajo estas hipótesis  $H$  es negativa entre 0 y  $\tau - \sigma$  y  $H(0) = H(\tau - \sigma) = 0$ .

Sean  $x_1 < x_2$  y definamos

$$s := \frac{x_2 - x_1}{t} > 0, \quad \tau := \frac{x_2 - y_2}{t}, \quad \sigma := \frac{x_1 - y_1}{t}.$$

Argumentando por contradicción, supongamos que  $y_2 < y_1$ . En este caso tenemos que

$$s + \sigma = \frac{x_2 - y_1}{t} < \frac{x_2 - y_2}{t} = \tau,$$

es decir,  $s \in (0, \tau - \sigma)$ , con  $\tau > \sigma$ . Por convexidad tenemos, por lo tanto, que  $H(s) < 0$ , lo cual implica la desigualdad

$$f^*\left(\frac{x_2 - y_1}{t}\right) + f^*\left(\frac{x_1 - y_2}{t}\right) < f^*\left(\frac{x_2 - y_2}{t}\right) + f^*\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right). \quad (17)$$

Por hipótesis,  $y_1$  minimiza a  $G(x_1, t, y)$ , por lo que

$$\begin{aligned}
 G(x_2, t, y_1) &= G(x_1, t, y_1) + tf^*\left(\frac{x_2 - y_1}{t}\right) - tf^*\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right) \\
 &\leq G(x_1, t, y_2) + tf^*\left(\frac{x_2 - y_1}{t}\right) - tf^*\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right) \\
 &< G(x_1, t, y_2) + tf^*\left(\frac{x_2 - y_2}{t}\right) - tf^*\left(\frac{x_1 - y_2}{t}\right) \\
 &= U_0(y_2) + tf^*\left(\frac{x_2 - y_2}{t}\right) \\
 &= G(x_2, t, y_2),
 \end{aligned}$$

tras haber usado la desigualdad (17). Sin embargo, esta última desigualdad contradice el hecho de que  $y_2$  minimiza a  $G(x_2, t, y)$ .  $\square$

En consecuencia, hemos probado el siguiente

**Corolario 2.2.** *El mapeo  $x \mapsto y(x, t)$ , donde  $y(x, t)$  es cualquier mínimo de  $G(x, t, y)$ , es no decreciente.*

La monotonicidad nos garantiza, a su vez, continuidad casi donde sea (ver [1], teorema 5.6.4, pág. 151):

**Proposición 2.3.** *Si para  $t$  fijo,  $y(x, t)$  es una función no decreciente de  $x$ , entonces  $y(x, t)$  es continua en  $x$  excepto en un conjunto numerable de puntos.*

En un punto de continuidad de  $y(\cdot, t)$ , éste es el único valor de  $y$  que minimiza a  $G$ . Para probar esto, sean  $y_-(x, t)$  y  $y_+(x, t)$  los valores más pequeño y más grande, respectivamente, que minimizan a  $G(x, t, y)$  para cada  $(x, t)$  fijo. Por definición,  $y_-(x, t) \leq y(x, t) \leq y_+(x, t)$ . Por otro lado, si  $x_2 > x_1$ , por el lema 2.1 tenemos que  $y(x_1, t) \leq y_-(x_2, t)$ , y  $y_+(x_1, t) \leq y(x_2, t)$ . Si  $x_0$  es un punto de continuidad de  $y(x, t)$ , tomando  $x_2 = x_0 + \varepsilon$  y  $x_1 = x_0 - \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño,

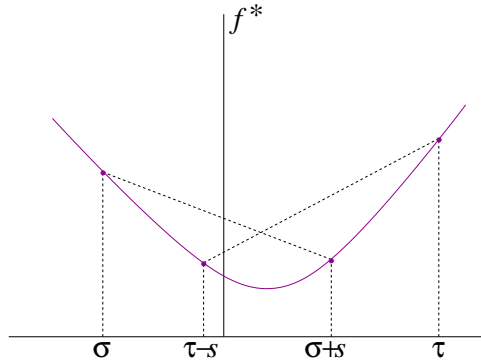


FIGURA 2. Dado que  $f^*$  es estrictamente convexa tenemos que  $f^*(\sigma + s) + f^*(\tau - s) < f^*(\tau) + f^*(\sigma)$  para  $\sigma < \tau$  fijos y cualquier  $s \in (0, \tau - \sigma)$ .

obtenemos

$$\begin{aligned} y_-(x_0, t) - y_+(x_0, t) &= (y_-(x_0, t) - y(x_0 - \varepsilon, t)) + (y(x_0 + \varepsilon, t) - y_+(x_0, t)) + \\ &\quad + (y(x_0 - \varepsilon, t) - y(x_0 + \varepsilon, t)) \\ &\geq -|y(x_0 + \varepsilon, t) - y(x_0 - \varepsilon, t)| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , ya que los primeros sumandos de lado derecho son no negativos. Como el lado izquierdo es independiente de  $\varepsilon$ , concluimos que  $y_-(x_0, t) \geq y_+(x_0, t)$ . De este modo,  $y_+(x, t) = y_-(x, t)$  para toda  $(x, t)$  excepto en valores de  $x$  donde  $y(x, t)$  es discontinua. En consecuencia, para todo  $t > 0$ , excluyendo a lo sumo un conjunto numerable de puntos en  $x$ , el valor  $y(x, t)$  que minimiza a  $G(x, t, y)$  está determinado de manera única. Denotamos a este valor como  $y = \hat{y}(x, t)$ .

En consecuencia, definimos para todo  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$  c.d.s.

$$u(x, t) := g\left(\frac{x - \hat{y}(x, t)}{t}\right), \quad (18)$$

donde  $g = a^{-1}$ ,  $a(u) = f'(u)$  y  $\hat{y}(x, t)$  es el único mínimo continuo de (16) salvo en un conjunto de medida cero. Para probar que (18) es solución débil del problema de Cauchy (1)-(2), definimos para cada  $n \in \mathbb{N}$  las siguientes aproximaciones

$$u_n(x, t) := \frac{\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x-y}{t}\right) e^{-nG(x,y,t)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x,y,t)} dy}, \quad (19)$$

$$f_n(x, t) := \frac{\int_{\mathbb{R}} f\left(g\left(\frac{x-y}{t}\right)\right) e^{-nG(x,y,t)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x,y,t)} dy}, \quad (20)$$

$$v_n(x, t) := \log \int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x,y,t)} dy, \quad (21)$$

para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ , c.d.s. Debemos verificar que las integrales en (19) - (21) existen.

**Lema 2.4.**  $G(x, t, y)$  es Lipschitz en  $y$ .

*Demostración.* Dado que  $f, g$  son  $C^1$  y  $u_0 \in L^\infty$  es acotada, estimamos

$$\begin{aligned} |G(x, t, y_1) - G(x, t, y_2)| &\leq \left| \int_{y_2}^{y_1} u_0(x) dx \right| + \left| t f^* \left( \frac{x - y_1}{t} \right) - t f^* \left( \frac{x - y_2}{t} \right) \right| \\ &= \left| \int_{y_2}^{y_1} u_0(x) dx \right| + \\ &\quad + \left| t \left( \left( \frac{x - y_1}{t} \right) g \left( \frac{x - y_1}{t} \right) - f \left( g \left( \frac{x - y_1}{t} \right) \right) - \left( \frac{x - y_2}{t} \right) g \left( \frac{x - y_2}{t} \right) + f \left( g \left( \frac{x - y_2}{t} \right) \right) \right) \right| \\ &\leq C |y_2 - y_1| + \tilde{C}(x, t) |y_2 - y_1|. \end{aligned}$$

Es decir, existe  $C(x, t) > 0$  tal que

$$|G(x, t, y_1) - G(x, t, y_2)| \leq C(x, t) |y_2 - y_1|.$$

□



Hemos observado que  $G(x, t, y) \rightarrow \infty$  cuando  $|y| \rightarrow \infty$ , siendo  $\hat{y}(x, t)$  el único mínimo de  $G$  (para  $(x, t)$  fijo). Por lo tanto para  $\delta > 0$ , tenemos que en  $|y - \hat{y}(x, t)| \geq \delta$ ,  $G$  es distinta de cero. Así, existe una constante  $\bar{C} = \bar{C}(x, t, \delta) > 0$  tal que

$$G(x, t, y) \geq \bar{C}|y - \hat{y}(x, t)| \geq \bar{C}\delta. \quad (22)$$

De este modo tenemos que

$$e^{-nG(x, t, y)} \leq e^{-n\bar{C}|y - \hat{y}(x, t)|},$$

para  $|y - \hat{y}(x, t)| > \delta$ . Así,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x, y, t)} dy &= \int_{|y - \hat{y}(x, t)| \leq \delta} e^{-nG(x, y, t)} dy + \int_{|y - \hat{y}(x, t)| > \delta} e^{-nG(x, y, t)} dy \\ &\leq C(n, x, t, \delta) + \int_{\mathbb{R}} e^{-n\bar{C}|y - \hat{y}(x, t)|} dy < \infty. \end{aligned}$$

Como  $f$  y  $g$  son de clase  $C^1$ , las integrales en (19) - (21) existen, y  $u_n, f_n$  y  $v_n$  están bien definidas. Ahora bien, por la forma de  $G$  (16) y recordando que  $df^*/dv = g(v)$ , reconocemos que

$$G_t(x, t, y) = f^*\left(\frac{x-y}{t}\right) - \left(\frac{x-y}{t}\right)g\left(\frac{x-y}{t}\right) = -f\left(g\left(\frac{x-y}{t}\right)\right),$$

$$G_x(x, y, t) = g\left(\frac{x-y}{t}\right).$$

De este modo diferenciando  $v_n$  obtenemos

$$\begin{aligned} (v_n)_x &= -\frac{n \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x-y}{t}\right) e^{-nG(x, y, t)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x, t, y)} dy} = -nu_n, \\ (v_n)_t &= \frac{n \int_{\mathbb{R}} f\left(g\left(\frac{x-y}{t}\right)\right) e^{-nG(x, y, t)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x, t, y)} dy} = nf_n. \end{aligned}$$

Dado que  $(v_n)_{xt} = (v_n)_{tx}$ , se tiene que  $(-nu_n)_t = (nf_n)_x$ , es decir,

$$(u_n)_t + (f_n)_x = 0. \quad (23)$$

Sin pérdida de generalidad podemos normalizar  $G$  y suponer que el único mínimo de  $G$  ocurre en  $y = \hat{y}(x, t)$  y que toma el valor

$$G(x, t, \hat{y}(x, t)) = 0.$$

El mínimo es único y la normalización no afecta la definición de  $u$  o de las aproximaciones  $u_n, f_n$ , salvo la de  $v_n$  por una constante. Tomemos  $\delta > 0$  arbitrario. Dado que  $G$  es Lipschitz en  $y$ , existe  $C_1 = C_1(x, t, \delta) > 0$  tal que

$$|G(x, t, y)| \leq C_1|y - \hat{y}(x, t)|,$$

para todo  $|y - \hat{y}(x, t)| < \delta$ . Esto implica que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x, y, t)} dy &\geq \int_{\hat{y}(x, t) - \delta}^{\hat{y}(x, t) + \delta} e^{-nG(x, t, y)} dy \geq \int_{\hat{y}(x, t) - \delta}^{\hat{y}(x, t) + \delta} e^{-nC_1|y - \hat{y}(x, t)|} dy \\
&= 2 \int_0^\delta e^{-nC_1 y} dy \\
&= \frac{2}{nC_1} (1 - e^{-nC_1 \delta}) \\
&\geq \frac{C_2}{n},
\end{aligned} \tag{24}$$

para todo  $n > 1/\delta$  y con  $C_2 > 0$  independiente de  $n$ .

Dado que  $g$  es de clase  $C^1$ , sea  $\tilde{C}(t) > 0$  la constante de Lipschitz de  $g(\cdot/t)$ . Usando la estimación (22) para  $|y - \hat{y}(x, t)| \geq \delta$  y (24) para  $|y - \hat{y}(x, t)| < \delta$  obtenemos

$$\begin{aligned}
|u_n(x, t) - u(x, t)| &= \left| \frac{\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x-y}{t}\right) e^{-nG(x, y, t)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x, t, y)} dy} - g\left(\frac{x - \hat{y}(x, t)}{t}\right) \right| \\
&\leq \frac{\int_{\mathbb{R}} \left| g\left(\frac{x-y}{t}\right) - g\left(\frac{x - \hat{y}(x, t)}{t}\right) \right| e^{-nG(x, y, t)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x, t, y)} dy} \\
&\leq \tilde{C}(t) \frac{\int_{\mathbb{R}} |y - \hat{y}(x, t)| e^{-nG(x, t, y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x, t, y)} dy} \\
&\leq \tilde{C}(t)\delta + \frac{n\tilde{C}(t)}{C_2} \int_{|y - \hat{y}(x, t)| \geq \delta} |y - \hat{y}(x, t)| e^{-n\tilde{C}|y - \hat{y}(x, t)|} dy \\
&\leq \tilde{C}(t)\delta + 2n\hat{C}(t) \int_0^\infty y e^{-\tilde{C}ny} dy \\
&= \tilde{C}(t)\delta + \frac{C_3(t)}{n}.
\end{aligned}$$

Tomando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  obtenemos para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$  fijo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(x, t) - u(x, t)| \leq \tilde{C}(t)\delta.$$

Dado que  $\delta > 0$  es arbitrario, hemos probado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = u(x, t),$$

para todo  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$  c.d.s. Análogamente es posible demostrar<sup>2</sup> que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, t) = f(u(x, t)).$$

De este modo, podemos tomar el límite de la ley de conservación (23) en sentido distribucional. Multiplicando (23) por una función de prueba  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$  e integrando por partes, llegamos a

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \phi_t u_n + \phi_x f_n dx dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0) u_n(x, 0) dx = 0. \tag{25}$$

<sup>2</sup>Se trata de la misma demostración, tomando  $\tilde{C}$  como la constante de Lipschitz de la composición  $(f \circ g)(\cdot/t)$ .

Tenemos que definir  $u_n(x, 0)$ . Para ello recordamos que  $G_x = g\left(\frac{x-y}{t}\right)$ ; por lo tanto

$$G_x(x, t, \hat{y}(x, t)) = g\left(\frac{x - \hat{y}(x, t)}{t}\right) = u(x, t).$$

Sabemos que  $y = \hat{y}(x, t)$  minimiza a  $G(x, t, y)$ ; así,

$$G(x, t, \hat{y}(x, t)) \leq G(x, t, x) = \int_0^x u_0(\zeta) d\zeta + tf^*(0),$$

es decir,

$$G(x, t, \hat{y}(x, t)) - \int_0^x u_0(\zeta) d\zeta \leq Ct. \quad (26)$$

Por otra parte, por definición de  $\hat{y}(x, t)$ ,

$$G(x, t, \hat{y}(x, t)) = \min_{y \in \mathbb{R}} \left( \int_0^y u_0(\zeta) d\zeta + tf^*\left(\frac{x-y}{t}\right) \right).$$

En consecuencia, podemos estimar

$$\begin{aligned} G(x, t, \hat{y}(x, t)) &= \int_0^x u_0(\zeta) d\zeta + \min_{y \in \mathbb{R}} \left( \int_x^y u_0(\zeta) d\zeta + tf^*\left(\frac{x-y}{t}\right) \right) \\ &\geq \int_0^x u_0(\zeta) d\zeta + \min_{y \in \mathbb{R}} \left( -C|x-y| + tf^*\left(\frac{x-y}{t}\right) \right) \\ &= \int_0^x u_0(\zeta) d\zeta + t \min_{z \in \mathbb{R}} \left( -C|z| + f^*(z) \right) \\ &= \int_0^x u_0(\zeta) d\zeta - t \max_{z \in \mathbb{R}} \left( C|z| - f^*(z) \right). \end{aligned}$$

Por el lema A.3 sabemos que  $(f^*)^* = f$ , por lo cual,

$$\max_{z \in \mathbb{R}} (C|z| - f^*(z)) \leq \max_{v \in (0, C)} \max_{z \in \mathbb{R}} (vz - f^*(z)) = \max_{v \in (0, C)} (f^*)^*(v) = \max_{v \in (0, C)} f(v) =: C_0,$$

con  $C_0 > 0$  (por la normalización de  $f$  y por convexidad estricta). De esta forma hemos probado que

$$G(x, t, \hat{y}(x, t)) - \int_0^x u_0(\zeta) d\zeta \geq -C_0 t. \quad (27)$$

Combinando con (26) obtenemos

$$\left| G(x, t, \hat{y}(x, t)) - \int_0^x u_0(\zeta) d\zeta \right| \leq Ct,$$

y en consecuencia,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} G(x, t, \hat{y}(x, t)) = \int_0^x u_0(\zeta) d\zeta.$$

Esto implica que  $G(x, 0, \hat{y}(x, 0)) = \int_0^x u_0 d\zeta$  c.d.s. y por lo tanto  $G_x(x, 0, \hat{y}(x, 0)) = u_0(x)$  c.d.s. De esta forma tomamos  $u_n(x, 0) = u_0(x)$  c.d.s., para obtener

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \phi_t u_n + \phi_x f_n dx dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0) u_0(x) dx = 0. \quad (28)$$

Dado que  $\phi$  es de soporte compacto podemos tomar el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  dentro de la integral; por lo tanto,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \phi_t u + \phi_x f(u) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0) u_0(x) dx = 0, \quad (29)$$

es decir,  $u$  es solución débil al problema de Cauchy (1) - (2). Esto prueba la existencia de la solución.

Finalmente, para verificar que es una solución entrópica, recordemos que el mapeo  $x \mapsto \hat{y}(x, t)$  es no decreciente. Por lo tanto, para todo  $x_1 \leq x_2$  y todo  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} f'(u(x_2, t)) - f'(u(x_1, t)) &= a(u(x_2, t)) - a(u(x_1, t)) \\ &= a\left(g\left(\frac{x_2 - \hat{y}(x_2, t)}{t}\right)\right) - a\left(g\left(\frac{x_2 - \hat{y}(x_2, t)}{t}\right)\right) \\ &= \frac{x_2 - \hat{y}(x_2, t)}{t} - \frac{x_1 - \hat{y}(x_1, t)}{t} \\ &\leq \frac{x_2 - x_1}{t}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que la solución de Lax (18) satisface la condición (3) y por lo tanto es una solución entrópica. Para terminar la demostración del teorema 1.1 sólo basta probar unicidad.

**2.3. Unicidad.** Sean  $u_1$  y  $u_2$  dos soluciones entrópicas. Definimos la variable  $w := u_2 - u_1$ , que satisface la ecuación lineal

$$w_t + (bw)_x = 0, \quad (30)$$

donde el coeficiente  $b = b(x, t)$  se define mediante

$$\begin{aligned} bw &:= f(u_2) - f(u_1) = \int_0^1 \frac{d}{d\theta} f(\theta u_2 + (1 - \theta)u_1) d\theta \\ &= (u_2 - u_1) \int_0^1 a(\theta u_2 + (1 - \theta)u_1) d\theta. \end{aligned}$$

En efecto, la ecuación (30) se satisface en sentido débil, ya que para toda  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

$$0 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} w \phi_t + bw \phi_x dx dt, \quad (31)$$

habiendo notado que  $w(x, 0) = w_0(x) \equiv 0$  c.d.s. Para cada  $\epsilon > 0$  definimos los alisamientos de  $u_2$  y  $u_1$  como  $u_2^\epsilon := \eta_\epsilon * u_2$ , y  $u_1^\epsilon := \eta_\epsilon * u_1$ , donde  $\eta_\epsilon$  denota el alisador de Friedrichs en las variables  $x$  y  $t$ . Por propiedades básicas del alisador de Friedrichs se tiene que

$$\|u_1^\epsilon\|_\infty \leq \|u_1\|_\infty, \quad \|u_2^\epsilon\|_\infty \leq \|u_2\|_\infty,$$

y, además,

$$u_1^\epsilon \rightarrow u_1, \quad u_2^\epsilon \rightarrow u_2, \quad \text{c.d.s.}, \quad \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Por la observación 1.2, las soluciones satisfacen la condición de Oleĭnik. Aplicando la definición del alisador

$$\frac{u^\epsilon(x_2) - u^\epsilon(x_1)}{x_2 - x_1} = \int_{-\epsilon}^\epsilon \eta_\epsilon(y) \frac{u(x_2 - y) - u(x_1 - y)}{x_2 - x_1} dy \leq \frac{C}{t} \int_{-\epsilon}^\epsilon \eta_\epsilon = \frac{C}{t},$$

es decir,  $u_1^\epsilon$  y  $u_2^\epsilon$  satisfacen la condición de Oleĭnik. Dado que, además, son de clase  $C^\infty$ , obtenemos

$$\partial_x u_1^\epsilon, \partial_x u_2^\epsilon \leq \frac{C}{t}. \quad (32)$$

Definimos

$$b^\epsilon(x, t) := \int_0^1 a(\theta u_2^\epsilon + (1 - \theta)u_1^\epsilon) d\theta.$$

Por ende, la expresión (31) se puede escribir como

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} w \phi_t + b^\epsilon w \phi_x dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (b - b^\epsilon) w \phi_x dx dt = 0. \quad (33)$$

Sea  $T > 0$  fijo, y sea  $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, T]; \mathbb{R})$  una función suave de soporte compacto. Consideremos el siguiente problema de valores finales

$$\begin{aligned} v_t^\epsilon + b^\epsilon v_x^\epsilon &= \Phi, & x \in \mathbb{R}, 0 < t < T, \\ v^\epsilon(x, T) &= 0, & x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (34)$$

La ecuación es lineal y se puede resolver mediante el método de características. Así, para cada  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$  fijo consideremos la solución  $\hat{x} = \hat{x}(s; x, t)$  a la ecuación de la característica,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{ds} &= b^\epsilon(\hat{x}, s), & s \geq t, \\ \hat{x}(t) &= x, \end{aligned}$$

de modo que,

$$\frac{dv^\epsilon}{ds}(\hat{x}(s), s) = v_s^\epsilon + b^\epsilon v_x^\epsilon = \Phi(\hat{x}(s), s).$$

Integrando, la solución al problema (34) es

$$v^\epsilon(x, t) := - \int_t^T \Phi(\hat{x}(s; x, t), s) ds. \quad (35)$$

La solución  $v^\epsilon$  es única y suave. Dado que  $v^\epsilon$  es acotada y que  $\Phi$  tiene soporte compacto en  $\mathbb{R} \times [0, T]$ , concluimos que  $v^\epsilon$  tiene soporte compacto en  $\mathbb{R} \times [0, T]$ . Por otra parte, para todo  $0 < \tilde{s} \leq t \leq T$  se tiene que

$$\begin{aligned} b_x^\epsilon(x, t) &= \partial_x \int_0^1 a(\theta u_2^\epsilon + (1 - \theta)u_1^\epsilon) d\theta \\ &= \int_0^1 f''(\theta u_2^\epsilon + (1 - \theta)u_1^\epsilon) (\theta \partial_x u_2^\epsilon + (1 - \theta) \partial_x u_1^\epsilon) d\theta \\ &\leq \frac{C}{t} \int_0^1 f''(\theta u_2^\epsilon + (1 - \theta)u_1^\epsilon) d\theta \\ &\leq \frac{\tilde{C}}{t} \leq \frac{\tilde{C}}{\tilde{s}}, \end{aligned} \quad (36)$$

en virtud de que  $f$  es convexa (y por ende, acotada en un dominio compacto), y habiendo aplicado (32). Definimos ahora

$$y^\epsilon(s) := \frac{\partial}{\partial x_0} \hat{x}^\epsilon(s; x_0, t_0), \quad s \geq t_0,$$

donde  $(x_0, t_0)$  es un punto fijo en  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$  con  $t_0 \leq T$ . Observamos que  $\hat{x}^\epsilon(t_0; x_0, t_0) = x_0$ , por lo que  $y^\epsilon(t_0) = 1$ . De esta manera,

$$\frac{\partial y^\epsilon}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \hat{x}^\epsilon}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_0} b^\epsilon(\hat{x}^\epsilon(s; x_0, t_0), s) = b_x^\epsilon(\hat{x}^\epsilon(s; x_0, t_0), s) \frac{\partial \hat{x}^\epsilon}{\partial x_0} = b_x^\epsilon y^\epsilon.$$

Integrando y usando  $y^\epsilon(t_0) = 1$  obtenemos

$$y^\epsilon(s) = \exp \left( \int_{t_0}^s b_x^\epsilon(\hat{x}^\epsilon(s; x_0, t_0), s) ds \right).$$

Tomando  $\tilde{s} \leq t_0 \leq s \leq T$  y usando (36), se obtiene la cota

$$|y^\epsilon(s)| = y^\epsilon(s) \leq e^{\tilde{C}(-1+T/\tilde{s})}. \quad (37)$$

Por otra parte, derivando la solución  $v^\epsilon$  con respecto a la variable espacial tenemos,

$$\begin{aligned} v_x^\epsilon &= -\partial_x \int_t^T \Phi(\hat{x}^\epsilon(\sigma; x, t), \sigma) d\sigma \\ &= \int_T^t \Phi_x(\hat{x}^\epsilon(\sigma; x, t), \sigma) \frac{\partial \hat{x}^\epsilon}{\partial x} d\sigma \\ &= \int_T^t \Phi_x(\hat{x}^\epsilon(\sigma; x, t), \sigma) y^\epsilon(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Así, usando la cota (37), concluimos que para toda  $s > 0$  existe una constante  $C_s > 0$ , independiente de  $\epsilon$ , tal que

$$|v_x^\epsilon| \leq C_s, \quad \text{en } \mathbb{R} \times [s, T]. \quad (38)$$

Finalmente se probará que

$$\int_{\mathbb{R}} |v_x^\epsilon(x, t)| dx \leq M, \quad (39)$$

con cota uniforme  $M > 0$ , y para todo  $0 \leq t \leq \delta$  si  $\delta > 0$  es suficientemente pequeño. Para ello, escojamos  $0 < \delta \ll 1$  tal que  $\Phi \equiv 0$  en  $\mathbb{R} \times [0, \delta]$ , lo cual es posible ya que  $\Phi$  tiene soporte compacto para tiempos no negativos. De esta manera garantizamos que para todo  $t \in [0, \delta]$ ,  $v^\epsilon$  es constante a lo largo de la curva característica  $\hat{x}^\epsilon(s; x, t)$  con  $s \in [t, \delta]$ . Consideremos una partición finita en  $x$ , de la forma,

$$x_0 < x_1 < \dots < x_N,$$

y tomemos los puntos

$$y_0 < y_1 < \dots < y_N,$$

donde cada  $y_j$  se define como  $y_j(s) := \hat{x}_j^\epsilon(s)$  para  $t \leq s < \delta$ , y  $\hat{x}_j^\epsilon$  es la curva característica con condición inicial en  $x_j$ , es decir, es la solución al sistema

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}_j^\epsilon}{ds} &= b^\epsilon(\hat{x}_j^\epsilon(s), s), \\ \hat{x}_j^\epsilon(t) &= x_j. \end{aligned}$$

En vista de que  $v^\epsilon$  es constante a lo largo de la característica,

$$\sum_{j=1}^N |v^\epsilon(x_j, t) - v^\epsilon(x_{j-1}, t)| = \sum_{j=1}^N |v^\epsilon(y_j(s), t) - v^\epsilon(y_{j-1}(s), t)| \leq \text{var } v^\epsilon(\cdot, \delta),$$

donde “var” denota la variación con respecto a  $x$  (ver apéndice ??, sección ??). Tomando el supremo sobre el conjunto de todas las posibles particiones finitas obtenemos la variación total, que para una función diferenciable  $h$  es simplemente  $\int |h'| dx$ . En consecuencia,

$$\int_{\mathbb{R}} |v_x^\epsilon(x, t)| dx = \text{T.V.} v^\epsilon(\cdot, t) \leq \text{T.V.} v^\epsilon(\cdot, \delta) = \int_{\mathbb{R}} |v_x^\epsilon(x, \delta)| dx.$$

Gracias a que  $v^\epsilon$  es suave con soporte compacto, obtenemos inmediatamente (39). De esta forma, podemos sustituir  $\phi = v^\epsilon$  en (33) y obtener

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} w \Phi \, dx dt + \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}} (b - b^\epsilon) w v_x^\epsilon \, dx dt + \int_\delta^T \int_{\mathbb{R}} (b - b^\epsilon) w v_x^\epsilon \, dx dt \\ &=: \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} w \Phi \, dx dt + I_1^\epsilon(\delta) + I_2^\epsilon(\delta). \end{aligned}$$

En vista de que  $u_1^\epsilon \rightarrow u_1$  y  $u_2^\epsilon \rightarrow u_2$  c.d.s., y usando la cota (38), por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, tenemos que  $I_2^\epsilon(\delta) \rightarrow 0$  si  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , para toda  $\delta > 0$ . Por otro lado, si  $0 < \delta < T$ , usando (39) se obtiene

$$|I_1^\epsilon(\delta)| = \left| \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}} (b - b^\epsilon) w v_x^\epsilon \, dx dt \right| \leq \delta C \max_{0 \leq t \leq \delta} \int_{\mathbb{R}} |v_x^\epsilon(x, t)| \, dx \leq \delta CM.$$

Finalmente, tomando el límite cuando  $\delta \rightarrow 0^+$ , obtenemos

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} w \Phi \, dx dt = 0,$$

para toda función arbitraria  $\Phi$  de soporte compacto en  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ . Por lo tanto,

$$w = 0, \quad \text{c.d.s. en } \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

Hemos demostrado unicidad de la solución entrópica y concluimos así la prueba del teorema 1.1.  $\square$

#### APÉNDICE A. LA TRANSFORMADA DE LEGENDRE

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^2$  que satisface

$$f''(u) \geq 1/C > 0, \quad \text{para toda } u \in \mathbb{R}, \quad (40)$$

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} f'(u) = \pm\infty, \quad (41)$$

Es decir,  $f$  es estrictamente convexa en todo  $\mathbb{R}$  y su derivada  $a := f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , es invertible.

**Definición A.1.** Si  $f$  satisface (40) y (41), definimos la transformada de Legendre de  $f$  como

$$f^*(v) := \max_{u \in \mathbb{R}} (uv - f(u)), \quad v \in \mathbb{R}. \quad (42)$$

**Observación A.2.** (a) Notamos que  $f^*$  está bien definida. Para cada número real  $v \in \mathbb{R}$  fijo, existe un único  $u_* \in \mathbb{R}$  tal que  $v = f'(u_*) = a(u_*)$ , ya que  $a = f'$  es inyectiva y sobre. De este modo la función  $\psi_v(u) = uv - f(u)$  tiene un máximo único en  $u = u_*$ , en vista de que  $\psi_v'(u_*) = 0$  y  $\psi_v''(u_*) = -f''(u_*) < 0$ . Así,  $f^*(v) = u_*v - f(u_*)$ . Denotamos a la inversa de  $a$  como  $g = a^{-1}$ . De esta manera obtenemos,  $u_* = g(v)$ . Por ende, para toda  $v \in \mathbb{R}$ ,  $f^*(v)$  está determinada por

$$f^*(v) = vg(v) - f(g(v)). \quad (43)$$

(b) Diferenciando (43),

$$\frac{df^*}{dv} = vg'(v) + g(v) - a(g(v))g'(v) = g(v), \quad (44)$$

por lo cual,

$$\frac{d^2 f^*}{dv^2} = g'(v) = \frac{1}{a'(g(v))} = \frac{1}{f''(g(v))} > 0,$$

esto es,  $f^*$  también es estrictamente convexa y de clase  $C^2$ .

Mas aún, bajo estas hipótesis tenemos el siguiente

**Lema A.3.** *Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^2$  y satisface (40) y (41), entonces  $(f^*)^* = f$ .*

*Demostración.* Por definición de la transformada de Legendre,

$$f^*(v) = \max_{u \in \mathbb{R}} (uv - f(u)) \geq uv - f(u),$$

para toda  $u \in \mathbb{R}$ , es decir,  $f(u) + f^*(v) \geq uv$ , para todo  $u \in \mathbb{R}$ ,  $v \in \mathbb{R}$ . De este modo obtenemos

$$f(u) \geq \sup_{v \in \mathbb{R}} (uv - f^*(v)). \quad (45)$$

Por otro lado,

$$\sup_{w \in \mathbb{R}} (uw - f^*(w)) = \sup_{w \in \mathbb{R}} (uw - \sup_{v \in \mathbb{R}} (wv - f(v))) = \sup_{w \in \mathbb{R}} \left( \inf_{v \in \mathbb{R}} (w(u - v) + f(v)) \right).$$

Dado que  $f$  es estrictamente convexa y de clase  $C^2$  sabemos que  $f(v) + f'(u)(u - v) \geq f(u)$  para todo  $v, u \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, tomando  $w = f'(u)$ , obtenemos

$$\sup_{w \in \mathbb{R}} (uw - f^*(w)) \geq \inf_{v \in \mathbb{R}} (f'(u)(u - v) + f(v)) \geq f(u).$$

Combinando con (45) concluimos que

$$\sup_{w \in \mathbb{R}} (uw - f^*(w)) = \max_{w \in \mathbb{R}} (uw - f^*(w)) = (f^*)^*(u) = f(u),$$

para toda  $u \in \mathbb{R}$ . □

#### REFERENCIAS

- [1] R. G. BARTLE AND D. R. SHERBERT, *Introduction to real analysis*, John Wiley & Sons Inc., New York, third ed., 2000.
- [2] E. HOPF, *The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$* , Comm. Pure Appl. Math. **3** (1950), pp. 201–230.
- [3] M. KUNIK, *A solution formula for a nonconvex scalar hyperbolic conservation law with monotone initial data*, Math. Methods Appl. Sci. **16** (1993), no. 12, pp. 895–902.
- [4] P. D. LAX, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957), pp. 537–566.
- [5] ———, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, no. 11 in CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1973.
- [6] D. SERRE, *Temple's fields and integrability of hyperbolic systems of conservation laws*, in International Conference in Nonlinear PDEs, G. Dong and F. Lin, eds., International Academic Publishers, New York, 1993, pp. 233–251.

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, CIRCUITO ESCOLAR S/N, C.P. 04510 CD. DE MÉXICO (MÉXICO)  
*Email address:* plaza@aries.iimas.unam.mx