

# SISTEMAS HIPERBÓLICOS DE LEYES DE CONSERVACIÓN

## EJEMPLOS (SECCIÓN 1)

04/02/2025

RAMÓN G. PLAZA

### 1. EJEMPLOS

En estas notas presentaré algunos modelos que están expresados como sistemas de leyes de conservación o leyes de balance, los cuales son importantes en mecánica de medios continuos. Estos sistemas tienen la siguiente forma conservativa:

$$u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} = \begin{cases} 0, & \text{(leyes de conservación),} \\ g(u), & \text{(leyes de balance).} \end{cases} \quad (1)$$

Aquí  $t > 0$  es la variable temporal,  $x \in \mathbb{R}^d$  es la variable espacial, donde  $d \geq 1$  es la dimensión del espacio físico. El vector

$$u(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ \vdots \\ u_n(x, t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

es el vector de cantidades conservadas o variables de estado, siendo  $n \in \mathbb{N}$  la dimensión del espacio de variables de estado. Generalmente  $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ , donde  $\mathcal{U}$  es un subconjunto (de variables de estado) abierto y conexo. Las funciones de flujo son de clase  $f^j \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq j \leq d$ .

**1.1. Ecuaciones de Euler para un fluido compresible.** El paradigma de un sistema de leyes de conservación, conocido como el sistema de *ecuaciones de Euler*, modela la dinámica de un fluido compresible no viscoso y que en coordenadas eulerianas se pueden escribir en la siguiente forma conservativa

$$\rho_t + \sum_{j=1}^3 (\rho v_j)_{x_j} = 0, \quad (2)$$

$$(\rho v_i)_t + \sum_{j=1}^3 (\rho v_i v_j)_{x_j} + p_{x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

$$\left(\rho \left(e + \frac{1}{2}|v|^2\right)\right)_t + \sum_{j=1}^3 (\rho v_j (e + \frac{1}{2}|v|^2) + p v_j)_{x_j} = 0, \quad (4)$$

donde  $\rho > 0$  es la densidad (por unidad de volumen) de masa del fluido,  $v = (v_1, v_2, v_3)^\top \in \mathbb{R}^3$  es el campo de velocidades,  $p$  es la presión termodinámica,  $e > 0$  es la densidad (por unidad de masa) de energía interna del fluido, y  $E := e + \frac{1}{2}|v|^2$  es la densidad de energía total del mismo. La ecuación (2) representa la ley de conservación de masa, mientras que las ecuaciones (3) corresponden a las leyes de

conservación de momento lineal en las tres direcciones del espacio físico. La ecuación (4) expresa conservación de la energía total.

El sistema de ecuaciones (2) - (4) se puede escribir en forma abreviada de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) &= 0, \\ (\rho v)_t + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) + \nabla p &= 0, \\ (\rho(e + \frac{1}{2}|v|^2))_t + \operatorname{div}(\rho(e + \frac{1}{2}|v|^2)v + pv) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

y está complementado por una ecuación de estado para el fluido de la forma,

$$p = \hat{p}(\rho, e), \quad (6)$$

que determina la presión en términos de las densidades de masa y de energía interna. La forma de la función  $\hat{p}$  se establece mediante observaciones experimentales y debe ser consistente con las leyes de la termodinámica. La invariancia de las ecuaciones (5) bajo traslaciones galileanas requiere que  $\hat{p}$  no dependa del campo de velocidades (ver Godlewski y Raviart [13], capítulo 4).

Observamos que este sistema de ecuaciones tiene la forma de un sistema de leyes de conservación donde  $d = 3$  es la dimensión del espacio físico y  $n = 5$  el número de variables de estado (o cantidades conservadas), las cuales son

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \rho(e + \frac{1}{2}|v|^2) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5,$$

mientras que las funciones de flujo están dadas por

$$\begin{aligned} F(u) &= \begin{pmatrix} \rho v_1 & \rho v_2 & \rho v_3 \\ \rho v_1^2 + p & \rho v_1 v_2 & \rho v_1 v_3 \\ \rho v_1 v_2 & \rho v_2^2 + p & \rho v_2 v_3 \\ \rho v_1 v_3 & \rho v_2 v_3 & \rho v_3^2 + p \\ (\rho(e + \frac{1}{2}|v|^2) + p)v_1 & (\rho(e + \frac{1}{2}|v|^2) + p)v_2 & (\rho(e + \frac{1}{2}|v|^2) + p)v_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ (u_2)^2/u_1 + \hat{p} & u_2 u_3/u_1 & u_2 u_4/u_1 \\ u_2 u_3/u_1 & (u_3)^2/u_1 + \hat{p} & u_3 u_4/u_1 \\ u_2 u_4/u_1 & u_3 u_4/u_1 & (u_4)^2/u_1 + \hat{p} \\ u_2 u_5/u_1 + (u_2/u_1)\hat{p} & u_3 u_5/u_1 + (u_3/u_1)\hat{p} & u_4 u_5/u_1 + (u_4/u_1)\hat{p} \end{pmatrix} \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^{5 \times 3}), \end{aligned}$$

donde

$$\hat{p} = \hat{p}(u_1, u_5/u_1 - \frac{1}{2}(u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)/u_1^2).$$

El conjunto de variables de estado es

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{u \in \mathbb{R}^5 : u_1 > 0, u_5/u_1 - \frac{1}{2}(u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)/u_1^2 > 0\} \\ &= \{(\rho, \rho v, \rho(e + \frac{1}{2}|v|^2)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : \rho > 0, e > 0\}. \end{aligned}$$

Existe una gran cantidad de referencias sobre las ecuaciones de Euler. Una buena introducción se puede encontrar en el libro de Courant y Friedrichs [6], así como en el capítulo 18 del libro de Smoller [28].

*1.1.1. Ecuaciones de Euler en una dimensión espacial.* En este curso prestaremos especial atención a las ecuaciones de Euler en una dimensión espacial, las cuales modelan la dinámica de un gas que fluye a través de un tubo y donde la densidad, la velocidad y la energía son constantes a lo largo de secciones transversales del mismo. El fenómeno es, por ende, esencialmente unidimensional. Especializando las ecuaciones (2) - (4) a una dimensión espacial, que denotaremos por  $x$  en la dirección del tubo, obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_x &= 0, \\ (\rho(e + \frac{1}{2}v^2))_t + (\rho(e + \frac{1}{2}v^2)v + pv)_x &= 0.\end{aligned}\tag{7}$$

Claramente, el sistema (7) es de la forma conservativa (1), donde  $d = 1$  es la dimensión del espacio físico, y el número de cantidades conservadas es  $n = 3$ . Aquí el campo de velocidades es escalar,  $v \in \mathbb{R}$ , que representa la velocidad del gas en cada instante de tiempo y en cada punto del tubo, en la dirección del mismo. En este caso las variables de estado son

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho(e + \frac{1}{2}v^2) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

y tenemos una función vectorial de flujo dada por

$$f(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho(e + \frac{1}{2}v^2)v + pv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_2^2/u_1 + p \\ u_2(u_3 + p)/u_1 \end{pmatrix} \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^3).$$

El conjunto de variables de estado es

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \{u \in \mathbb{R}^3 : u_1 > 0, u_3/u_1 - \frac{1}{2}u_2^2/u_1^2 > 0\} \\ &= \{(\rho, \rho v, \rho(e + \frac{1}{2}v^2)) \in \mathbb{R}^3 : \rho > 0, e > 0\},\end{aligned}$$

y la ecuación de estado es nuevamente  $p = \hat{p}(\rho, e)$ .

Nótese que el conjunto admisible de estados requiere la condición  $\rho > 0$ , la cual expresa, en términos físicos, que el modelo no contempla la ausencia de materia o de elementos de fluido, es decir, el vacío.

*1.1.2. Ecuaciones de Euler en variables lagrangianas.* Al reescribir las ecuaciones de Euler (5) en variables lagrangianas obtenemos un sistema muy complicado y poco aplicable si la dimensión del espacio físico es  $d \geq 2$ . Por esta razón nos limitaremos al caso unidimensional  $d = 1$ . Usando la ley de conservación de masa en (7),

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0,\tag{8}$$

podemos escribir un cambio de coordenadas  $(x, t) \mapsto (y, t)$  que depende de la solución. En efecto, la ecuación (8) implica que la forma diferencial  $dy = \rho dx - \rho v dt$  es exacta. Así, podemos definir la variable lagrangiana  $y(x, t) = \int^x \rho(\xi, t) d\xi$  de manera única (módulo una constante), de tal forma que  $y_x = \rho$  y  $y_t = -\rho v$ . Definiendo el *volumen específico* del gas como  $\tau := 1/\rho$ , para  $\rho > 0$ , y aplicando el cambio de variables, la ley de conservación de masa (8) se transforma en

$$\partial_t \tau = \partial_y v.$$

De este modo, tras aplicar el cambio de variables, para cada ley de conservación en variables eulerianas de la forma  $\partial_t u_i + \partial_x f_i = 0$ , obtenemos

$$\partial_t(\tau u_i) + \partial_y(f_i - v u_i) = 0.$$

Tomando  $u_i = \rho v$  y  $f_i = \rho v^2 + p$ , la ecuación de conservación de momento en (7) se transforma en

$$\partial_t v + \partial_y p = 0.$$

Análogamente, tomando  $u_i = \rho e + \frac{1}{2}\rho v^2$  y  $f_i = (\rho e + \frac{1}{2}\rho v^2 + p)v$  en la ecuación de conservación de energía en (7), obtenemos

$$\partial_t(e + \frac{1}{2}v^2) + \partial_y(vp) = 0.$$

En resumen, y reetiquetando la variable lagrangiana  $y$  por  $x$  por simplicidad en la notación, obtenemos el sistema de ecuaciones de Euler en forma lagrangiana

$$\begin{aligned} \tau_t - v_x &= 0, \\ v_t + p_x &= 0, \\ (e + \frac{1}{2}v^2)_t + (vp)_x &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

donde  $e + \frac{1}{2}v^2$  es la densidad de energía total, y la ecuación de estado se puede reescribir en términos del volumen específico de la siguiente forma

$$p = \tilde{p}(\tau, e) := \hat{p}(1/\tau, e),$$

donde  $\hat{p}$  es la función dada en (6). Naturalmente, el sistema (9) está escrito en forma conservativa, donde las variables de estado y la función de flujo son

$$u = (\tau, v, e + \frac{1}{2}v^2)^\top \in \mathbb{R}^3, \quad y, \quad f(u) = (-v, \tilde{p}(\tau, e), v\tilde{p}(\tau, e))^\top \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^3),$$

respectivamente, y el conjunto admisible de variables de estado es

$$\mathcal{U} = \{(\tau, v, e + \frac{1}{2}v^2) \in \mathbb{R}^3 : \tau > 0, e > 0\}.$$

**Observación 1.1.** *El jacobiano de la transformación  $(x, t) \mapsto (y, t)$  es  $\rho$ , el cual es siempre positivo en  $\mathcal{U}$ . Si  $\rho = 0$  entonces el cambio de variables no es válido, y en este caso el volumen específico  $\tau = \rho^{-1}$  se reduce a una masa de Dirac con norma igual a la longitud del intervalo en donde se presenta el vacío. Las ecuaciones de Euler en formulación euleriana (5) tampoco están bien definidas en el vacío, pues no es posible determinar la velocidad a partir del momento lineal, que es la variable conservada.*

**1.2. Modelo de tráfico de Lighthill-Whitham-Richards.** Consideremos una autopista en un solo sentido, sin entradas ni salidas. Sea  $\rho = \rho(x, t)$  la densidad de autos (número de autos por unidad de longitud) al instante  $t > 0$  en la posición  $x \in \mathbb{R}$  de la autopista unidimensional. Supongamos que  $\rho$  está acotado, de modo que

$$0 \leq \rho \leq \rho_m,$$

donde la cota  $\rho_m > 0$  está relacionada con el número máximo posible de autos en la autopista. Asimismo, sea  $u$  la velocidad de los autos en la autopista. Supongamos que existe un límite de velocidad  $u_m > 0$ . Por conservación de la cantidad de autos tenemos la siguiente ecuación,

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0,$$

que representa la conservación de “masa” de autos en la autopista, que se desplazan con velocidad  $u$ . Podemos suponer que la velocidad depende de la densidad de

autos, siendo ésta decreciente con respecto a  $\rho$  (los autos van más lento cuando hay muchos autos). De este modo podemos proponer una relación simple del tipo

$$u(\rho) = u_m (1 - \rho/\rho_m),$$

en la que evidentemente  $u(0) = u_m$  y  $u \rightarrow 0$  cuando  $\rho \rightarrow \rho_m^+$ . El modelo toma la siguiente forma de una ley de conservación,

$$\rho_t + q(\rho)_x = 0, \quad (10)$$

con función de flujo  $q$  dada por

$$q(\rho) = \rho u_m (1 - \rho/\rho_m). \quad (11)$$

Claramente la variable conservada es la densidad de masa de autos  $\rho \in \mathbb{R}$ , y el conjunto de variables de estado es simplemente el intervalo  $\mathcal{U} = [0, \rho_m] \subset \mathbb{R}$ . Cabe señalar que, en realidad, el número total de autos en una autopista es una cantidad discreta, y que este modelo es una aproximación continua y aplicable sólo cuando el número de autos es suficientemente grande.

**Observación 1.2.** *Es posible considerar términos difusivos (ver Whitham [31], pág. 72), y obtener un modelo más preciso que tome en cuenta el hecho de que un conductor frena (o acelera) cuando éste nota un aumento (o disminución) en la densidad de autos. De esta manera podemos suponer que  $u(\rho) - u_m (1 - \rho/\rho_m)$  tiene signo opuesto a  $\rho_x$ . Así, proponemos*

$$u(\rho) = u_m (1 - \rho/\rho_m) - \epsilon \rho_x,$$

donde el coeficiente  $0 < \epsilon \ll 1$  es pequeño. De esta manera, llegamos a la ecuación

$$\rho_t + q(\rho)_x = \epsilon(\rho \rho_x)_x, \quad (12)$$

donde la función de flujo  $q(\rho)$  también está dada por (11). Ésta ecuación constituye una regularización de segundo orden a la ley de conservación. Notemos que la ecuación (12) no está escrita en forma conservativa, aunque para su deducción hemos partido de un principio de conservación como tal. Podemos pensar que (12) es una ley de conservación con flujo efectivo  $\hat{q}(\rho, \rho_x) = \rho \hat{u}(\rho) - \epsilon \rho \rho_x$ . En este caso, sin embargo, la dependencia de  $\hat{q}$  con respecto a  $\rho_x$  cambia por completo la naturaleza de la ecuación, ya que (10) es una ecuación hiperbólica mientras que la ecuación (12) es de tipo parabólico<sup>1</sup>. El nuevo término  $\epsilon(\rho \rho_x)_x$  en (12) produce difusión de las ondas, y el coeficiente de difusión  $\epsilon > 0$  es una medida del tiempo de respuesta del conductor para frenar o acelerar.

El modelo de tráfico representado por la ley de conservación escalar (10) es conocido como el *modelo de Lighthill-Whitham-Richards* [21, 24], y se estudiará con detalle más adelante. Pueden encontrar una discusión muy completa de este modelo en el tercer capítulo del libro de Whitham [31].

---

<sup>1</sup>una diferencia importante radica en que la ecuación (12) siempre tiene soluciones clásicas para todo  $t > 0$  y todo dato inicial. Por eso le llamamos al término  $\epsilon(\rho \rho_x)_x$  una *regularización* de segundo orden.

**1.3. Ecuaciones de agua poco profunda.** Las llamadas *ecuaciones de agua poco profunda* modelan la propagación de perturbaciones (ondas) en agua o en otros fluidos incompresibles que responden a fuerzas gravitacionales o rotacionales. La hipótesis fundamental consiste en suponer que la profundidad del fluido es pequeña comparada con la longitud de las ondas. Para un fluido incompresible no viscoso (por ejemplo, agua) que fluye sobre un plano, y suponiendo además por simplicidad que la fuerza de gravedad es la única fuerza externa (no se considera la aceleración por rotaciones), las ecuaciones de agua poco profunda tienen la siguiente forma conservativa

$$\begin{aligned} \eta_t + (\eta u)_x + (\eta v)_y &= 0, \\ (\eta u)_t + \left(\frac{1}{2}g\eta^2 + \eta u^2\right)_x + (\eta uv)_y &= 0, \\ (\eta v)_t + (\eta uv)_x + \left(\frac{1}{2}g\eta^2 + \eta v^2\right)_y &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

donde  $\eta = \eta(x, y, t) > 0$  es la altura del fluido, y  $(u, v)(x, y, t) \in \mathbb{R}^2$  es el campo de velocidades bidimensional. La constante  $g > 0$  es la constante de gravedad. En las unidades apropiadas las cantidades conservadas son la masa del fluido (proporcional a  $\eta$ , ya que por incompresibilidad la densidad de masa es constante) y los momentos horizontal y vertical, proporcionales a  $\eta u$  y  $\eta v$ , respectivamente. De esta manera las variables de estado y la función de flujo son

$$U = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta u \\ \eta v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad y \quad F(U) = \begin{pmatrix} \eta u & \eta v \\ \eta u^2 + \frac{1}{2}g\eta^2 & \eta uv \\ \eta uv & \eta v^2 + \frac{1}{2}g\eta^2 \end{pmatrix} \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^{3 \times 2}).$$

El conjunto de variables de estado es

$$\mathcal{U} = \{(\eta, \eta u, \eta v) \in \mathbb{R}^3 : \eta > 0\}.$$

Nótese que se han despreciado tanto la componente vertical de la velocidad como la dependencia de los campos con respecto a la variable vertical.

Las ecuaciones de agua poco profunda constituyen el modelo más sencillo para describir la estructura horizontal del océano y la atmósfera (cf. Pedlosky [23], Majda [22]). Usualmente también se incorpora a las ecuaciones un término correspondiente a la fuerza de Coriolis, asociada a la rotación terrestre. Aunque las ecuaciones se pueden derivar a partir de simplificar las ecuaciones de Navier-Stokes (o de Euler) bajo la hipótesis de que la longitud característica de las ondas es muy grande en comparación con la profundidad característica (lo cual es una buena aproximación en el caso de flujos en geofísica; ver Stoker [29]), también es posible derivar el sistema siguiendo primeros principios, bajo la hipótesis del balance hidrostático (es decir, suponiendo que la presión es  $p = \rho g(\eta - z)$ , donde  $z$  es la variable vertical), así como despreciando la velocidad vertical y la dependencia en  $z$  (ver [18]). Como referencias, pueden también consultar los libros de Johnson [17] y Acheson [2], entre otros.

*1.3.1. Ecuaciones de agua poco profunda en una dimensión.* Para modelar ondas de agua en un canal, es posible simplificar el sistema (13) suponiendo que el campo de velocidades  $u$  es escalar y en dirección del canal, la cual asociamos a la dirección de  $x$ . De este modo, en el sistema (13) se excluye la dependencia con respecto a  $y$ , y se desprecia la componente transversal de la velocidad, para obtener, así, el

siguiente modelo unidimensional

$$\begin{aligned}\eta_t + (\eta u)_x &= 0, \\ (\eta u)_t + \left(\frac{1}{2}g\eta^2 + \eta u^2\right)_x &= 0.\end{aligned}\tag{14}$$

Las variables conservadas son ahora  $U = (\eta, \eta u)^\top \in \mathbb{R}^2$ , con función de flujo  $f(U) = (\eta u, \frac{1}{2}g\eta^2 + \eta u^2)^\top \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^2)$ . El conjunto admisible de estados es  $\mathcal{U} = \{(\eta, \eta u) \in \mathbb{R}^2 : \eta > 0\}$ .

**1.4. Materiales hiperelásticos.** Consideremos un sólido deformable que en reposo ocupa una configuración de referencia  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . La formulación lagrangiana describe el movimiento de este sólido mediante un mapeo

$$(x, t) \mapsto X(x, t) \in \mathbb{R}^3, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, \infty),$$

que denota la posición a tiempo  $t$  de una partícula del sólido que en tiempo  $t = 0$  estaba en  $x \in \Omega$ . De esta forma definimos la velocidad local  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  y el tensor de deformación  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  mediante

$$V = X_t, \quad U = \nabla_x X,$$

o componente a componente,  $V_j = \partial X_j / \partial t$ ,  $U_{ij} = \partial X_i / \partial x_j$ , para todo  $i, j = 1, 2, 3$ .

Un material es llamado *hiperelástico* si admite una densidad de energía interna dada por una función  $W : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ , que depende del gradiente de deformación solamente,  $W = W(U)$ , y si las fuerzas de deformación  $\mathcal{F}$  se derivan de esta energía (principio de trabajo virtual):

$$\mathcal{F}_\alpha = \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} \frac{\partial W}{\partial U_{\alpha j}}, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Adicionalmente, y motivados por la física del fenómeno, vamos a requerir, por un lado, que la densidad de energía sea invariante bajo rotaciones, es decir, que  $W(U) = W(RU)$  para toda rotación  $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $R^\top R = I$ ,  $\det R = 1$ . Por otro lado, el gradiente de deformación debe satisfacer  $\det U > 0$ , lo cual significa que el material no cambia de orientación. Suponiendo, además, que el material no conduce calor, que el proceso es isentrópico, y que no hay fuerzas externas, la dinámica está regida únicamente por las leyes de conservación de masa y momento. De esta manera, las ecuaciones de movimiento son las siguientes:

$$\partial_t U_{ij} - \partial_{x_j} V_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3\tag{15}$$

$$\partial_t V_i - \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} \frac{\partial W}{\partial U_{ij}} = 0, \quad i = 1, 2, 3.\tag{16}$$

Las primeras nueve ecuaciones (15) corresponden a ecuaciones de compatibilidad, dadas las definiciones de  $U$  y  $V$ , y equivalen a conservación de masa. Las últimas tres ecuaciones (16) expresan conservación de momento. Este sistema puede abreviarse de la siguiente manera

$$\begin{aligned}U_t - \nabla_x V &= 0, \\ V_t - \operatorname{div}_x \sigma(U) &= 0,\end{aligned}\tag{17}$$

donde

$$\sigma(U) := \frac{\partial W}{\partial U} \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

es el primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff (cf. Ciarlet [5]), definido componente a componente como

$$\sigma(U)_{ij} = \frac{\partial W}{\partial U_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

El sistema (17) es un sistema de leyes de conservación donde tenemos doce variables de estado, determinadas por las nueve componentes del gradiente de deformación, más tres componentes del campo local de velocidades. Por lo tanto, aquí  $n = 12$  y  $d = 3$ . Las variables de estado y los flujos están dados por

$$u = (U_{11}, U_{21}, U_{31}, U_{12}, U_{22}, U_{32}, U_{13}, U_{23}, U_{33}, V_1, V_2, V_3)^\top \in \mathbb{R}^{12},$$

y por,

$$\begin{aligned} f^1(u) &= -(V_1, V_2, V_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sigma(U)_{11}, \sigma(U)_{21}, \sigma(U)_{31})^\top \\ f^2(u) &= -(0, 0, 0, V_1, V_2, V_3, 0, 0, 0, \sigma(U)_{12}, \sigma(U)_{22}, \sigma(U)_{32})^\top \\ f^3(u) &= -(0, 0, 0, 0, 0, 0, V_1, V_2, V_3, \sigma(U)_{13}, \sigma(U)_{23}, \sigma(U)_{33})^\top, \end{aligned}$$

respectivamente. Tenemos, además, una restricción de origen físico ya que, por la definición de  $U$ , las derivadas mixtas de  $X$  deben ser iguales, es decir,  $\partial_{x_k} U_{ij} = \partial_{x_j} U_{ik}$ , para todas  $i, j, k = 1, 2, 3$ . En forma abreviada escribimos esta constricción como  $\text{curl } U = 0$ .

**Observación 1.3.** *Las ecuaciones (17) son lineales cuando la función de densidad de energía  $W$  es cuadrática. Este tipo de modelos no es, sin embargo, realista. Aparte de estar definida para  $U$  con  $\det U > 0$ , usualmente también se requiere que  $W$  tienda a infinito cuando el material se comprime a un sólo punto, es decir,*

$$\lim_{|U| \rightarrow 0} W(U) = \infty.$$

*Esto impone la restricción de que los modelos en elasticidad sean, en esencia, no-lineales.*

Una buena referencia para teoría de elasticidad es el texto de Ciarlet [5]. Para modelos más generales de medios continuos y un tratamiento un tanto más matemático recomiendo consultar el libro de Dafermos [7].

**1.5. Termoelasticidad adiabática unidimensional.** Sea una barra elástica con sección transversal constante, la cual es idealizada como un medio continuo unidimensional que ocupa el intervalo  $[0, L]$  (configuración de referencia) cuando está en reposo. El movimiento longitudinal de la barra está determinada por la variable lagrangiana  $X(x, t)$ , que denota la posición de una partícula que a tiempo  $t = 0$  ocupaba la posición  $x \in [0, L]$ . Definimos el gradiente de deformación como  $u = X_x$  y la velocidad local como  $v = X_t$ . Supondremos que el medio es homogéneo; que la densidad de masa de la barra es constante,  $\rho_0 = 1$ ; y que  $u > 0$ . De este modo, el mapeo  $x \mapsto X(x, t)$  es siempre invertible para todo  $t \geq 0$ . Un medio termoelástico es aquél para el cual, para cualquier partícula fija  $x$  y para cualquier movimiento  $X$ , la energía interna  $e$ , el esfuerzo de Piola-Kirchhoff  $\sigma$ , la temperatura  $\theta$ , y el flujo de calor  $Q$ , están determinados por el valor en  $(x, t)$  del gradiente de deformación  $u$ , la entropía específica  $s$ , y el gradiente de temperatura  $\nabla\theta$ , mediante

relaciones constitutivas que tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} e &= \hat{e}(u, s), \\ \sigma &= \rho_0 \partial_u \hat{e}(u, s), \\ \theta &= \partial_s \hat{e}(u, s), \\ Q &= \hat{Q}(u, s, \nabla \theta), \end{aligned}$$

Si suponemos que la barra está constituida por un medio termoelástico que no conduce calor (proceso adiabático en el que  $Q \equiv 0$ ), y en ausencia de fuerzas externas, así como de fuentes de calor, las ecuaciones de conservación de masa, momento lineal y energía tienen la siguiente forma conservativa (lagrangiana)

$$\begin{aligned} u_t - v_x &= 0, \\ v_t - \sigma(u, s)_x &= 0, \\ (e + \frac{1}{2}v^2)_t - (v\sigma(u, s))_x &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Las cantidades conservadas son  $U = (u, v, e + \frac{1}{2}v^2)^\top \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ , con función de flujo dada por

$$f(U) = - \begin{pmatrix} v \\ \sigma(u, s) \\ v\sigma(u, s) \end{pmatrix},$$

y donde el conjunto de variables de estado es  $\mathcal{U} = \{(v, u, e + \frac{1}{2}v^2) \in \mathbb{R}^3 : e > 0\}$ . El sistema (18) está complementado por la desigualdad de Clausius

$$s_t \geq 0, \tag{19}$$

que expresa la segunda ley de la termodinámica. Para la derivación de las ecuaciones de una barra termoelástica, el lector puede consultar Slemrod [27], y Jiang y Racke [16] (ver también [7, 4]).

*1.5.1. Barra hiperelástica unidimensional.* El esfuerzo  $\sigma$  sobre la barra depende sólo del gradiente de deformación mediante  $\sigma(u) = W'(u)$ , donde la función  $W(u) := \rho_0 \hat{e}(u)$  está determinada por las propiedades constitutivas del material, y debe satisfacer  $W(0) = 0$  y  $W'(0) = \sigma(0) > 0$ . La primera condición significa que el material en su configuración de referencia está libre de esfuerzos, mientras que la segunda implica que el módulo de tensión de la barra es positiva. En puntos donde el gradiente de deformación  $u$  y la velocidad local  $v$  son continuas y diferenciables, el movimiento de la barra está determinada por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_t - v_x &= 0, \\ v_t - \sigma(u)_x &= 0, \end{aligned} \tag{20}$$

ya que suponemos que la barra está libre de fuerzas externas (tales como la gravedad) y que el momento lineal y la masa se conservan. Aquí  $x \in [0, L]$ ,  $t \geq 0$ , y el sistema tiene claramente forma conservativa. El lector notará inmediatamente que este sistema es un caso particular de (17), en el caso de un material elástico unidimensional. Las cantidades conservadas y la función de flujo son

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad f(U) = - \begin{pmatrix} v \\ \sigma(u) \end{pmatrix},$$

respectivamente. El conjunto de variables de estado es  $\mathcal{U} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0\}$ . Como referencias el lector puede consultar [8, 15, 1].

**1.6. El sistema  $p$ .** Considérese el siguiente sistema de dos ecuaciones en forma conservativa

$$\begin{aligned} v_t - w_x &= 0, \\ w_t + p(v)_x &= 0, \end{aligned} \tag{21}$$

donde  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ , y  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función no lineal dada, de clase  $C^2$ , que satisface las condiciones  $p' < 0$ , y  $p'' > 0$ . Las variables de estado y función de flujo son

$$u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \text{y} \quad f(u) = \begin{pmatrix} -w \\ p(v) \end{pmatrix} \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2),$$

respectivamente. Este sistema de ecuaciones, conocido como *sistema  $p$* , constituye el ejemplo no trivial más simple de un sistema no lineal de leyes de conservación, razón por la cual es de gran importancia teórica. Más aún, el sistema  $p$  ha sido ampliamente estudiado porque, también, es el paradigma de varios modelos de origen físico. Por ejemplo, consideremos las ecuaciones de Euler en forma lagrangiana (9), y supongamos, además, que el proceso es isentrópico. Como consecuencia la energía interna  $e$  es constante y la presión es función solamente del volumen específico  $\tau$ . Bajo estas condiciones, el sistema (9) se reduce a un sistema  $p$  de la forma (21), donde la presión (a densidad de energía constante) hace las veces de la función  $p$ . Dicha función debe satisfacer las condiciones  $p'(\tau) < 0$  y  $p''(\tau) > 0$ .

Asimismo, claramente el modelo para una barra elástica unidimensional (20) tiene la forma de un sistema  $p$ , donde la función  $p$  se define como  $p = -\sigma$ , siendo  $\sigma$  el esfuerzo. Finalmente, nótese que la primera ecuación en (21) implica, en regiones simplemente conexas de  $(x, t)$ , que existe una función  $\psi = \psi(x, t)$  tal que  $\psi_x = v$  y  $\psi_t = w$ . Sustituyendo en la segunda ecuación de (21) obtenemos la siguiente ecuación de onda no lineal para  $\psi$ ,

$$\psi_{tt} + p(\psi_x)_x = 0,$$

cuya velocidad de propagación,  $c = \sqrt{-p'(\psi_x)}$ , depende de  $\psi_x$ . Esta clase de ecuaciones ha sido ampliamente estudiada a partir del trabajo fundamental de Fermi, Pasta y Ulam [9]. Por su importancia, el sistema  $p$  es estudiado en diversos textos (véanse, por ejemplo, [28, 25, 20]) y, a pesar de su sencillez, sigue siendo objeto de intensa investigación.

**1.7. Ecuaciones de Maxwell.** Las ecuaciones de Maxwell en el vacío con permisividades magnética  $\mu_0 = 1$  y eléctrica  $\epsilon_0 = 1$ , tienen la siguiente forma

$$\mathbf{B}_t + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \tag{22}$$

$$\mathbf{E}_t - \nabla \times \mathbf{B} = -\mathbf{J}, \tag{23}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \tag{24}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{25}$$

en donde los campos vectoriales  $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)^\top \in \mathbb{R}^3$  y  $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)^\top \in \mathbb{R}^3$  representan el campo eléctrico y el campo magnético, respectivamente. La corriente eléctrica está determinada por el campo  $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)^\top$ . Las ecuaciones de evolución (dependientes del tiempo), a saber, (22) y (23), corresponden a las leyes de Faraday y de Ampère, respectivamente. Las ecuaciones (24) y (25) son las leyes de Gauss eléctrica y magnética. Observamos que este sistema no tiene forma conservativa. Sin embargo, podemos escribir las leyes de Faraday y de Ampère como un

sistema de leyes de balance de la forma

$$u_t + \operatorname{div} F(u) = \tilde{J},$$

donde el vector de variables de estado  $u$  está dado por

$$u = (B_1, B_2, B_3, E_1, E_2, E_3)^\top \in \mathbb{R}^6,$$

con funciones de flujo,

$$F(u) = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 \\ -E_3 & 0 & E_1 \\ E_2 & -E_1 & 0 \\ 0 & -B_3 & B_2 \\ B_3 & 0 & -B_1 \\ -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 3},$$

y donde las fuentes del sistema están determinadas por el campo

$$\tilde{J} = (0, 0, 0, J_1, J_2, J_3)^\top \in \mathbb{R}^6.$$

Las leyes de Gauss en forma de divergencia, que no involucran derivadas temporales, cierran el sistema como constricciones a los campos. Notemos que estas ecuaciones son *lineales*, ya que los flujos  $F$  son funciones lineales de las variables de estado. Como referencia, recomiendo ver el libro de Jackson [14].

**1.8. Magnetohidrodinámica (MHD).** El siguiente sistema de ecuaciones en forma conservativa modela el movimiento de un fluido en presencia de un campo electromagnético. Suponemos que dicho campo electromagnético ejerce una fuerza sobre el fluido, de tal manera que la aceleración se ve afectada por el campo. Igualmente el movimiento mismo del fluido contribuye a la evolución del campo. El sistema de ecuaciones tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) &= 0 \\ (\rho v_i)_t + \operatorname{div}(\rho v_i v) + (p + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2)_{x_i} - \operatorname{div}(B_i \mathbf{B}) &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ (\frac{1}{2}\rho|v|^2 + \rho e + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2)_t + \operatorname{div}(\frac{1}{2}v\rho|v|^2 + v\rho e + p v + \mathbf{E} \times \mathbf{B}) &= 0, \\ \mathbf{B}_t + \nabla \times \mathbf{E} &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

donde, al igual que en las ecuaciones de Euler, tenemos que  $\rho > 0$  es la densidad de masa del fluido,  $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$  es el campo de velocidades,  $e > 0$  es la densidad de energía interna,  $p$  es la presión termodinámica,  $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)^\top \in \mathbb{R}^3$  es el campo eléctrico, y  $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)^\top \in \mathbb{R}^3$  denota al campo magnético. Las ecuaciones (26) representan conservación de masa, momento, energía y la ley de Faraday, respectivamente.

Este sistema está complementado, además, por dos leyes constitutivas. Por un lado tenemos la ecuación de estado del fluido,  $p = \hat{p}(\rho, e)$ , y por el otro, consideramos la ley aproximada  $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times v$ , la cual es una aproximación a equilibrio local ya que  $\mathbf{E} + v \times \mathbf{B} \approx 0$  si la velocidad es pequeña. Claramente, este sistema de ecuaciones representa un sistema de leyes de conservación con cantidades conservadas

$$u = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, \rho(\frac{1}{2}|v|^2 + e) + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2, B_1, B_2, B_3)^\top \in \mathbb{R}^8,$$

y con funciones de flujo determinadas por

$$f^j(u) = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j + (p + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2)\delta_1^j + B_1 B_j \\ \rho v_2 v_j + (p + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2)\delta_2^j + B_2 B_j \\ \rho v_3 v_j + (p + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2)\delta_3^j + B_3 B_j \\ \rho v_j(\frac{1}{2}|v|^2 + e) + p v_j + (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_j \\ (\nabla \times \mathbf{E})_1 \\ (\nabla \times \mathbf{E})_2 \\ (\nabla \times \mathbf{E})_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^8,$$

para cada  $j = 1, 2, 3$ . Aquí  $\delta_l^k$  es la delta de Kronecker, y  $(\nabla \times \mathbf{E})_i$  es la componente  $i$  del rotacional de  $\mathbf{E}$ .

En referencia a las ecuaciones de la magnetohidrodinámica, el lector puede consultar el octavo volumen de la serie de Física Teórica de Landau y Lifshitz [19] (véanse también [10, 30]).

**1.9. Electroforesis.** Se conoce como *electroforesis* al proceso utilizado para separar  $n$  componentes químicos ionizados en una solución acuosa mediante la aplicación de un campo eléctrico. Si  $u_j \geq 0$  denota la concentración del ion  $j$  y la constante  $c_j > 0$  es su *movilidad electroforética* (definida como el producto  $c_j = \mu_j J$ , donde  $J > 0$  es la corriente eléctrica aplicada por el experimentalista y  $\mu_j > 0$  es la movilidad del ion), entonces el sistema de ecuaciones que determina la dinámica de las concentraciones tiene la siguiente forma conservativa:

$$\partial_t u_j + \partial_x \left( \frac{c_j u_j}{\sum_{i=1}^n u_i} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (27)$$

donde las movilidades electroforéticas satisfacen  $0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n$ . Las variables conservadas son las concentraciones de las  $n$  especies iónicas,

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{U},$$

con función de flujo  $f \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^n)$  dada por

$$f(u) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n u_i} \begin{pmatrix} c_1 u_1 \\ \vdots \\ c_n u_n \end{pmatrix}.$$

El conjunto de variables de estado es  $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^n : \sum u_j > 0, u_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$ . Para una deducción de éste y otros modelos relacionados el lector puede consultar Fife y Geng [11] (véase también Alekseyevskaya [3]). El sistema (27) pertenece a una clase especial de sistemas llamados *ricos* o *semi-Hamiltonianos*, los cuales están dotados de algunas propiedades interesantes que veremos más adelante (ver Serre [25, 26] y Freistühler [12]).

#### REFERENCIAS

- [1] R. ABEYARATNE AND J. K. KNOWLES, *Kinetic relations and the propagation of phase boundaries in solids*, Arch. Ration. Mech. Anal. **114** (1991), no. 2, pp. 119–154.
- [2] D. J. ACHESON, *Elementary fluid dynamics*, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1990.

- [3] T. V. ALEKSEYEVSKAYA, *Study of the system of quasilinear equations for isotachophoresis*, Adv. in Appl. Math. **11** (1990), no. 1, pp. 63–107.
- [4] G.-Q. CHEN AND C. M. DAFERMOS, *The vanishing viscosity method in one-dimensional thermoelasticity*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), no. 2, pp. 531–541.
- [5] P. G. CIARLET, *Mathematical elasticity. Vol. I: Three-dimensional elasticity*, vol. 20 of Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988.
- [6] R. COURANT AND K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Wiley Interscience, New York, 1948.
- [7] C. M. DAFERMOS, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, vol. 325 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin, third ed., 2010.
- [8] J. L. ERICKSEN, *Equilibrium of bars*, J. Elasticity **5** (1975), no. 3–4, pp. 191–201.
- [9] E. FERMI, J. PASTA, AND S. ULAM, *Studies of nonlinear problems*. Los Alamos Scientific Laboratory, Report No. LA-1940, 1955.
- [10] V. C. A. FERRARO AND C. PLUMPTON, *An introduction to magneto-fluid mechanics*, Oxford University Press, London, 1961.
- [11] P. C. FIFE AND X. GENG, *Mathematical aspects of electrophoresis*, in Reaction-diffusion equations (Edinburgh, 1987–1988), K. J. Brown and A. A. Lacey, eds., Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1990, pp. 139–172.
- [12] H. FREISTÜHLER, *Separation of linear and nonlinear modes in a hyperbolic system describing electrophoresis*, Quart. Appl. Math. **52** (1994), no. 1, pp. 31–34.
- [13] E. GODLEWSKI AND P.-A. RAVIART, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, vol. 118 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [14] J. D. JACKSON, *Classical electrodynamics*, John Wiley & Sons Inc., New York, second ed., 1975.
- [15] R. D. JAMES, *The propagation of phase boundaries in elastic bars*, Arch. Ration. Mech. Anal. **73** (1980), no. 2, pp. 125–158.
- [16] S. JIANG AND R. RACKE, *Evolution equations in thermoelasticity*, vol. 112 of Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.
- [17] R. S. JOHNSON, *A modern introduction to the mathematical theory of water waves*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [18] P. K. KUNDU AND I. M. COHEN, *Fluid mechanics*, Academic Press, San Diego, 2002.
- [19] L. D. LANDAU AND E. M. LIFSHITZ, *Course of theoretical physics, Vol. 8: Electrodynamics of continuous media*, Pergamon International Library of Science, Technology, Engineering and Social Studies, Pergamon Press, Oxford, 1984.
- [20] P. D. LAX, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, no. 11 in CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1973.
- [21] M. J. LIGHTHILL AND G. B. WHITHAM, *On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads*, Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. **229** (1955), pp. 317–345.
- [22] A. MAJDA, *Introduction to PDEs and waves for the atmosphere and ocean*, vol. 9 of Courant Lecture Notes in Mathematics, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2003.
- [23] J. PEDLOSKY, *Geophysical fluid dynamics*, Springer-Verlag, New York, Second ed., 1987.
- [24] P. I. RICHARDS, *Shock waves on the highway*, Operations Res. **4** (1956), pp. 42–51.
- [25] D. SERRE, *Systems of Conservation Laws 1. Hyperbolicity, entropies, shock waves*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.
- [26] ———, *Systems of Conservation Laws 2. Geometric structures, oscillations and initial-boundary value problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.
- [27] M. SLEMROD, *Global existence, uniqueness, and asymptotic stability of classical smooth solutions in one-dimensional nonlinear thermoelasticity*, Arch. Ration. Mech. Anal. **76** (1981), no. 2, pp. 97–133.
- [28] J. SMOLLER, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York, Second ed., 1994.
- [29] J. J. STOKER, *Water waves. The mathematical theory with applications*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1992. Reprint of the 1957 original, A Wiley-Interscience Publication.

- [30] W. G. VINCENTI AND C. H. KRUGER, *Introduction to Physical Gas Dynamics*, Wiley & Sons, New York, 1965.
- [31] G. B. WHITHAM, *Linear and Nonlinear Waves*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons Inc., New York, 1999. Reprint of the 1974 original, A Wiley-Interscience Publication.

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, CIRCUITO ESCOLAR S/N, C.P. 04510 CD. DE MÉXICO (MÉXICO)  
*Email address:* plaza@mym.iimas.unam.mx