SISTEMAS HIPERBÓLICOS DE LEYES DE CONSERVACIÓN

LA CONDICIÓN DE ENTROPÍA GENERALIZADA Y SUS CONSECUENCIAS: CONTRACCIÓN EN LA NORMA L^1 (SECCIÓN 2)

11/03/2025

RAMÓN G. PLAZA

1. La condición de entropía generalizada

Consideremos una ley de conservación (o ley escalar) en una dimensión espacial, de la forma

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{1}$$

donde $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$, $u(x,t) \in \mathcal{U}$, siendo $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y acotado (espacio de variables de estado), y la función de flujo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^2. El problema de Cauchy asociado consiste en resolver (1) sujeta a una condición inicial,

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

donde $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Pondremos atención a la clase de soluciones débiles que son C^1 por pedazos, es decir, que tienen un número contable de discontinuidades Σ_k, $k \in \mathbb{N}$, y que fuera de ellas son soluciones clásicas (es decir, de clase C^1) de la ley de conservación (1). En este caso, se pueden calcular los límites por la derecha, u_R, y por la izquierda, u_L, sobre cada punto $P = (x,t)$ de cualquier discontinuidad Σ, tal y como se vio en clase.

Una solución débil de (1), de clase C^1 por pedazos, satisface la *condición de entropía generalizada* si en cada discontinuidad Σ se tiene que

$$\big(\alpha f(u_L) + (1-\alpha) f(u_R) - f(\alpha u_L + (1-\alpha) u_R)\big) \operatorname{sgn}[u] \leq 0, \qquad \forall \alpha \in [0,1]. \tag{3}$$

Aquí $[u] := (u_R - u_L)$.

La importancia de la desigualdad de entropía generalizada (3) radica en que constituye una relación geométrica muy simple sobre la función de flujo f, lo cual tiene muchas ventajas cuando consideramos aplicaciones concretas. Analicemos la interpretación geométrica de (3) dependiendo del signo de $[u]$.

Caso 1: $[u] > 0$**.** Si $u_R > u_L$ entonces la desigualdad (3) toma la forma

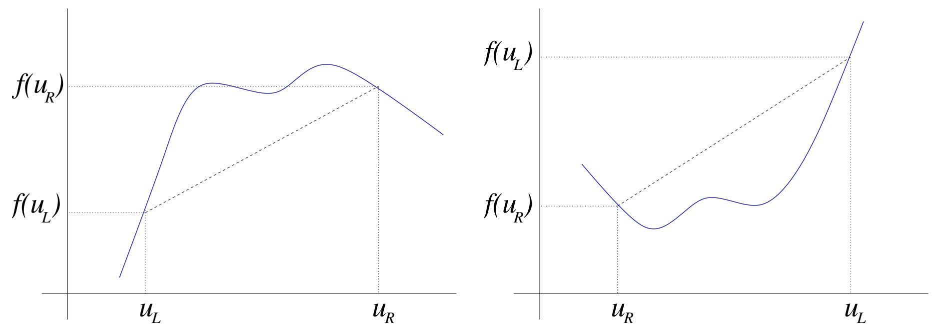
$$\alpha f(u_L) + (1-\alpha) f(u_R) \leq f(\alpha u_L + (1-\alpha) u_R), \tag{4}$$

para todo $\alpha \in [0,1]$. Por lo tanto, la solución es entrópica (equivalentemente, toda posible discontinuidad es admisible) *si y sólo si la gráfica de f restringida a (u_L, u_R) está situada por encima de su cuerda.* Dicha cuerda tiene como ecuación

$$c(u) = \frac{[f(u)]}{[u]}(u - u_L) + f(u_L) = \alpha f(u_L) + (1-\alpha) f(u_R),$$

con

$$\alpha = -\frac{(u - u_R)}{[u]} \in [0,1], \qquad u \in [u_L, u_R].$$



(a) $u_L < u_R$ (b) $u_R < u_L$

FIGURA 1. La figura (a) muestra una discontinuidad admisible para el caso $u_L < u_R$, es decir, la gráfica de f restringida a (u_R, u_L) está situada por encima de su cuerda. La figura (b) respresenta el caso cuando $u_R < u_L$; la discontinuidad es admisible si la gráfica de f restringida a (u_R, u_L) está situada por debajo de su cuerda.

Este caso se puede apreciar en la figura 1(a).

Caso 2: $[u] < 0$**.** Si $u_R < u_L$ entonces la desigualdad (3) toma la forma

$$\alpha f(u_L) + (1-\alpha) f(u_R) \geq f(\alpha u_L + (1-\alpha) u_R), \tag{5}$$

para todo $\alpha \in [0,1]$. De este modo, en este caso la solución es entrópica (es decir, toda discontinuidad es admisible) *si y sólo si la gráfica de f restringida a (u_R, u_L) está situada por debajo de su cuerda.* Dicha cuerda tiene como ecuación

$$c(u) = \frac{[f(u)]}{[u]}(u - u_R) + f(u_R) = \alpha f(u_L) + (1-\alpha) f(u_R),$$

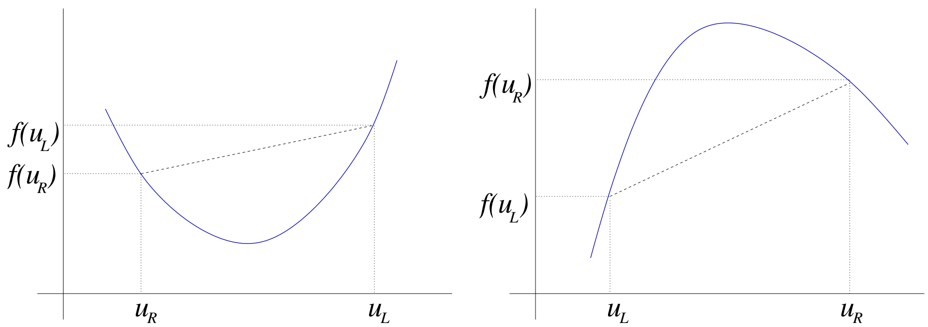
con

$$\alpha = -\frac{(u - u_R)}{[u]} \in [0,1], \qquad u \in [u_R, u_L].$$

Véase la figura 1(b).

Ejemplo 1.1. *La condición (3) se simplifica considerablemente si la función f es estrictamente convexa o estrictamente cóncava.*

(a) *Si f es estrictamente convexa (como ejemplo tenemos la ecuación de Burgers no viscosa, con $f(u) = \frac{1}{2}u^2$), la gráfica está siempre bajo su cuerda. Por lo tanto, la discontinuidad es admisible si y sólo si $u_R < u_L$ (ver figura 2(a)).*
(b) *Si f es estrictamente cóncava, la gráfica de f siempre está por encima de su cuerda. Por lo tanto, la discontinuidad es admisible si y sólo si $u_L < u_R$ (ver figura 2(b)).*



(a) $u_R < u_L$

(b) $u_L < u_R$

FIGURA 2. Figura (a): si f es estrictamente convexa entonces la discontinuidad es admisible si y sólo si $u_R < u_L$. Figura (b): si f es estrictamente cóncava entonces la discontinuidad es admisible si y sólo si $u_L < u_R$.

2. Equivalencia con otras condiciones de entropía

Las soluciones débiles de clase C^1 por pedazos constituyen una clase especial de soluciones al problema de Cauchy, para las cuales la condición de entropía generalizada (3) y la desigualdad de entropía,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \phi_t E(u) + \phi_x \Psi(u) \, dxdt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x,0) E(u_0(x)) \, dx \ \geq \ 0, \tag{6}$$

para toda función de prueba

$$\phi \in \mathcal{D}_+ := \{\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) \ : \ \phi \geq 0\},$$

y para todo par de entropía generalizado (E, Ψ), son equivalentes (en esa clase). El lector habrá notado que la condición (3) tiene una interpretación geométrica muy simple y que es más fácil de verificar que (6). En esta sección vamos a analizar algunas consecuencias de la condición (3), entre las cuales destaca la unicidad de la solución entrópica en esta clase particular de soluciones. Motivados por la pérdida de unicidad de soluciones débiles, en la sección anterior introdujimos tres condiciones de entropía que, por conveniencia del lector, escribimos aquí nuevamente.

La condición de entropía de Lax. Sea u una solución débil del problema de Cauchy y sea Σ una discontinuidad, parametrizada por $\Sigma = \{(\hat{x}(t), t) \ : \ t \in I\}$, con $I \subset \mathbb{R}_+$ un intervalo. Si $P \in \Sigma$ es cualquier punto sobre la discontinuidad, se definen los límites u_L y u_R a cada lado de Σ de la manera usual. Se dice que u satisface la *condición de entropía de Lax* sobre Σ si

$$f'(u_R) \leq s \leq f'(u_L), \tag{7}$$

para todo punto P de Σ, y donde $s = d\hat{x}/dt$ es la velocidad de la discontinuidad en ese punto; por la condición de Rankine-Hugoniot, $s = [f(u)]/[u]$. La condición de Lax muestra que las características inciden en la discontinuidad de ambos lados, tal y como sucede en el caso de la onda de choque para la ecuación de Burgers no viscosa (clase pasada). Observamos también que en el caso estrictamente convexo,

$f'' > 0$ (equivalentemente, estrictamente cóncavo, $f'' < 0$), las desigualdades en (7) son estrictas:

$$f'(u_R) < s < f'(u_L). \tag{8}$$

Cabe mencionar que, para el caso estrictamente convexo, la condición de entropía de Lax se reduce a $u_R < u_L$, como puede ser verificado sin dificultad.

La condición de Lax-Oleĭnik. Claramente, la condición de entropía de Lax se deduce de la siguiente condición, conocida como la *condición de entropía de Lax-Oleĭnik*:

$$\frac{f(u) - f(u_R)}{u - u_R} \leq s \leq \frac{f(u) - f(u_L)}{u - u_L}, \tag{9}$$

para toda u entre u_L y u_R, límites izquierdo y derecho, respectivamente, en cada punto P de Σ. Esta condición tiene la misma interpretación geométrica que la condición de Lax.

Lema 2.1. *En el caso general, con $f \in C^2$, la condición de entropía generalizada (3) implica las condiciones de entropía de Lax (7) y de Lax-Oleĭnik (9).*

Demostración. Suponiendo que $u_R \neq u_L$, $\alpha \in (0,1)$, y dividiendo (3) entre $\alpha|u_R - u_L|$, obtenemos

$$\frac{f(u_R) - f(\alpha u_L + (1-\alpha)u_R)}{\alpha[u]} \leq \frac{[f(u)]}{[u]}.$$

Toda u entre u_L y u_R se puede escribir como $u = \alpha u_L + (1-\alpha)u_R$, para cierta $\alpha \in [0,1]$. Así, $u - u_R = \alpha u_L + (1-\alpha)u_R - u_R = -\alpha[u]$ y la desigualdad anterior implica (usando la condición de Rankine-Hugoniot) que

$$\frac{f(u) - f(u_R)}{u - u_R} \leq \frac{d\hat{x}}{dt}.$$

De la misma manera, pero ahora dividiendo (3) entre $(1-\alpha)|u_R - u_L|$, podemos demostrar que

$$\frac{[f(u)]}{[u]} \leq \frac{f(u) - f(u_L)}{u - u_L}.$$

De este modo obtenemos la condición de entropía de Lax-Oleĭnik (9) para toda u entre u_R y u_L. Claramente, la condición de Lax se deduce de la condición de Lax-Oleĭnik cuando tomamos los límites cuando $u \to u_R$, y cuando $u \to u_L$, del lado izquierdo y derecho de la desigualdad, respectivamente. □ □

La condición de Oleĭnik (caso convexo). En el caso estrictamente convexo se definió también (ver sección anterior) lo que se conoce como la *condición de Oleĭnik*: si f es estrictamente convexa, una solución débil es entrópica si existe una constante $C > 0$ tal que para toda $a \geq 0$ y todo $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, se tiene que

$$u(x+a,t) - u(x,t) < \frac{Ca}{t}. \tag{10}$$

Esta condición, introducida por Oleĭnik en [2], tiene ventajas cuando se estudian métodos numéricos, ya que está formulada en términos de diferencias finitas.

Lema 2.2. *Cuando la función de flujo es estrictamente convexa, $f'' \geq \delta > 0$, la condiciones de entropía generalizada (3), de Lax (7), de Lax-Oleĭnik (9) y de Oleĭnik (10), son equivalentes.*

Demostración. En virtud del lema 2.1 y de que la condición de entropía generalizada se reduce a la condición de Lax en el caso convexo, es decir, $u_R < u_L$, basta con demostrar que las condiciones de Lax y de Oleĭnik son equivalentes. Suponiendo que u es solución débil que cumple la condición (10), sea $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ un punto de discontinuidad de u. En ese caso, para todo $\epsilon > 0$

$$u(x+\epsilon,t) - u(x-\epsilon,t) < \frac{2C\epsilon}{t}.$$

Tomando el límite cuando $\epsilon \to 0^+$ obtenemos $u_R - u_L < 0$, que es la condición de Lax. Inversamente, supongamos que la condición de Lax se cumple en toda discontinuidad. Si (x,t) es un punto de continuidad de u entonces se tiene que

$$u(x+\epsilon,t) - u(x-\epsilon,t) < C(t)\epsilon,$$

para todo $\epsilon > 0$, donde $C = C(t) > 0$ es una constante para $t > 0$ fijo. Es posible demostrar que si $f'' \geq \delta > 0$ entonces la constante es $C(t) = 1/\delta t$ (ejercicio). Si (x,t) es un punto de discontinuidad de u entonces el salto debe ser negativo por la condición de Lax. Esto implica que $u(x+\epsilon,t) - u(x-\epsilon,t) < 0 < C\epsilon/t$, para $\epsilon \sim 0^+$. La desigualdad para todo $\epsilon > 0$ resulta de aplicar la condición de Oleĭnik en los puntos de continuidad de u a lo largo de la recta para $t > 0$ fijo, hasta encontrar una discontinuidad a la derecha o a la izquierda. El valor de $u = u_R$ en la discontinuidad a la izquierda debe ser mayor que el valor de $u = u_L$ en la discontinuidad; asimismo, el valor de $u = u_L$ en la discontinuidad a la derecha debe ser menor que el valor de $u = u_R$ en la discontinuidad. De esta forma todos los posibles saltos de u (un conjunto numerable) a lo largo de la recta real con $t > 0$ fijo tienen el mismo signo, y (10) es válida para todo $a > 0$. $\square$

3. Contracción en la norma L^1

A continuación vamos a demostrar que la condición de entropía generalizada garantiza la unicidad de la solución entrópica al problema de Cauchy en la clase de soluciones C^1 por pedazos con un conjunto numerable de discontinuidades. Este resultado es una generalización del principio de contracción en L^1 para f estrictamente convexa probado por B. Quinn-Keyfitz [3] (véase también [1]).

Proposición 3.1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 y sea $u_0 \in L^\infty$ (acotada). Si el problema de Cauchy (1) - (2), tiene una solución débil de clase C^1 por pedazos que satisface la condición de entropía generalizada, entonces es única.*

Esta proposición es consecuencia de un resultado más general.

Teorema 3.2 (contracción en la norma L^1)**.** *Sea f de clase C^2, y sean u y v dos soluciones débiles en la clase de funciones C^1 por pedazos, para las cuales todas sus discontinuidades satisfacen la condición de entropía generalizada. Entonces $\|u(t) - v(t)\|_{L^1}$ es una función no creciente de $t \geq 0$.*

Demostración. Sean u y v dos soluciones entrópicas de la ley de conservación (1), que satisfacen, en toda discontinuidad, la condición de entropía generalizada (3). Denotamos

$$w := u - v,$$

Asimismo, denotamos la norma L^1 de w como

$$r(t) := \|w(\cdot,t)\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |w(x,t)|\, dx = \sum (-1)^k \int_{y_k(t)}^{y_{k+1}(t)} (u-v)(x,t)\, dx, \quad (11)$$

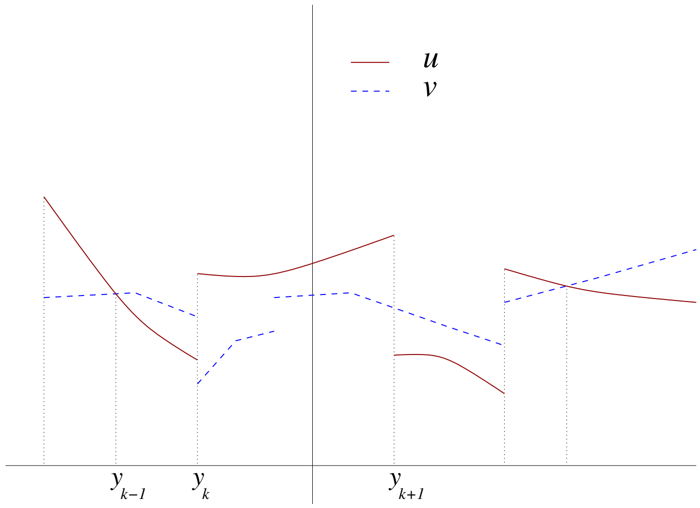


FIGURA 3. Elección de los puntos $y_k(t)$ para t fijo, tales que $\operatorname{sgn}(u(x,t) - v(x,t)) = (-1)^k$ para $x \in (y_k(t), y_{k+1}(t))$. La gráfica de u está representada por la línea continua (en rojo), y la de v por la línea punteada (en azul). Nótese que para cada k tenemos que, o bien $u(\cdot,t)$ y $v(\cdot,t)$ son continuas en $y_k(t)$ (punto donde $u = v$), o bien $y_k(t)$ es un punto de discontinuidad de u o de v.

donde los puntos $y_k(t)$ son escogidos para cada t fijo de modo que

$$\operatorname{sgn}(u(x,t) - v(x,t)) = (-1)^k, \qquad \text{para cada } x \in (y_k(t), y_{k+1}(t)).$$

Los puntos y_k son funciones de t y la suma puede ser finita o infinita. La figura 3 muestra la forma de elegir los puntos y_k. Para cada k tenemos dos casos:

(i) $y_k(t)$ es un punto de continuidad, tanto de $u(\cdot,t)$ como de $v(\cdot,t)$. En estos puntos

$$u(y_k(t),t) = v(y_k(t),t).$$

(ii) $y_k(t)$ es un punto de discontinuidad de $u(\cdot,t)$ o de $v(\cdot,t)$. En este caso $y_k(t)$ denota una curva de discontinuidad que satisface la condición de entropía.

Dado que u y v satisfacen la ley de conservación en sentido débil, si son continuas en el intervalo (a,b) entonces satisfacen el principio de conservación en forma integral:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx = f(u(a,t)) - f(u(b,t)) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \big(f(u(a+\epsilon,t)) - f(u(b-\epsilon,t))\big). \quad (12)$$

Por lo tanto, derivando (11) con respecto a t obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \sum(-1)^k \frac{d}{dt}\int_{y_k(t)}^{y_{k+1}(t)} (u-v)(x,t)\,dx \\ &= \sum(-1)^k \lim_{\epsilon\to 0^+}\Big((u-v)(y_{k+1}(t)-\epsilon,t)\frac{dy_{k+1}}{dt} - (u-v)(y_k(t)+\epsilon,t)\frac{dy_k}{dt} + \\ &\qquad + f(u(y_k(t)+\epsilon,t)) - f(u(y_{k+1}(t)-\epsilon,t)) + \\ &\qquad + f(v(y_{k+1}(t)-\epsilon,t)) - f(v(y_k(t)+\epsilon,t))\Big), \qquad (13) \\ &=: \sum(-1)^k(\rho_{k+1}-\rho_k),\end{aligned}$$

donde ρ_j representa al sumando que involucra a y_j, con $j = k+1$ o $j = k$. En el caso (i), u y v son continuas en y_k y además $u(y_k,t) = v(y_k,t)$, por lo que el sumando k en (13) es cero, y basta con sumar en la fórmula las contribuciones de los puntos de discontinuidad y_{k+1} de u, de v, o de ambos; es decir, es suficiente considerar el caso (ii). Supongamos, por ejemplo, que u es discontinua en y_{k+1}, el cual podría ser también un punto de discontinuidad de v. Si definimos

$$\begin{aligned} u_R &:= \lim_{\epsilon\to 0^+} u(y_{k+1}+\epsilon), \qquad & v_R &:= \lim_{\epsilon\to 0^+} v(y_{k+1}+\epsilon), \\ u_L &:= \lim_{\epsilon\to 0^+} u(y_{k+1}-\epsilon), \qquad & v_L &:= \lim_{\epsilon\to 0^+} v(y_{k+1}-\epsilon),\end{aligned}$$

entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $u_R < u_L$ (el caso contrario se analiza de manera análoga). Tenemos dos casos posibles:

(a) $v_L \in (u_R, u_L)$,
(b) $v_L \notin (u_R, u_L)$.

En el caso (a) el signo de $u - v$ es positivo en (y_k, y_{k+1}); por ende $(-1)^k = 1$ y k es par. Por la condición de Rankine-Hugoniot en la discontinuidad $y_{k+1}(t)$ de u,

$$\frac{dy_{k+1}}{dt} = \frac{f(u_R)-f(u_L)}{u_R-u_L}.$$

Por inspección de los términos de la suma en (13), el sumando $(-1)^k\rho_{k+1}$ tiene la forma

$$\begin{aligned}(-1)^k\rho_{k+1} = \rho_{k+1} &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\Big((u-v)(y_{k+1}-\epsilon)\frac{dy_{k+1}}{dt} + f(v(y_{k+1}-\epsilon)) - f(u(y_{k+1}-\epsilon))\Big) \\ &= (u_L - v_L)\Big(\frac{f(u_R)-f(u_L)}{u_R-u_L}\Big) + f(v_L) - f(u_L).\end{aligned}$$

Notamos, sin embargo, que existe $\alpha = (v_L - u_R)/(u_L - u_R) \in (0,1)$, tal que $v_L = \alpha u_L + (1-\alpha)u_R$. Así, por la condición de entropía generalizada,

$$\begin{aligned}\rho_{k+1} &= f(v_L) - (\alpha f(u_L) + (1-\alpha)f(u_R)) \\ &= \operatorname{sgn}(u_R-u_L)\big(\alpha f(u_L) + (1-\alpha)f(u_R) - f(\alpha u_L + (1-\alpha)u_R)\big) \le 0.\end{aligned}$$

La contribución del sumando $(-1)^k\rho_{k+1}$ es no positiva.

En el caso (b) tenemos dos subcasos:

(b_1) $v_L \ge u_L$,
(b_2) $v_L \le u_R$.

En el caso (b_1) tenemos que si $v_L = u_L$ entonces el sumando es cero, $\rho_{k+1} = 0$. Así, supongamos que $v_L > u_L$. Entonces $u - v$ es negativo en (y_k, y_{k+1}) y $(-1)^k = -1$, es decir, k es impar. Notamos también que, necesariamente, $v_R \le u_R < u_L <$

v_L, ya que de otro modo el signo de $u - v$ seguiría siendo negativo a la derecha de y_{k+1}, contradiciendo la definición de los puntos y_k. Esto implica que y_{k+1} es también punto de discontinuidad de v, y la velocidad de la onda de choque se puede expresar también en términos de los valores de v, esto es,

$$\frac{dy_{k+1}}{dt} = \frac{f(v_R) - f(v_L)}{v_R - v_L}.$$

Dado que $u_L \in [v_R, v_L)$, entonces existe $\alpha = (u_L - v_R)/(v_L - v_R) \in [0, 1)$, tal que $u_L = \alpha v_L + (1-\alpha) v_R$. De esta manera, usando la condición de entropía generalizada, obtenemos que

$$\begin{aligned}(-1)^k \rho_{k+1} = -\rho_{k+1} &= f(u_L) - f(v_L) + (v_L - u_L)\Big(\frac{f(v_R) - f(v_L)}{v_R - v_L}\Big) \\ &= \operatorname{sgn}(v_R - v_L)\big(f(\alpha v_L + (1-\alpha)v_R) - (\alpha f(v_L) + (1-\alpha) f(v_R))\big) \leq 0,\end{aligned}$$

y el sumando contribuye negativamente o cero. Similarmente se puede probar que la contribución del sumando es no positiva en el caso (b_2).

De este modo, hemos demostrado que la suma en (13) es no positiva, y por lo tanto,

$$\frac{dr(t)}{dt} \leq 0,$$

para todo $t > 0$. □ □

Demostración la proposición 3.1. Sean u y v dos soluciones de clase C^1 por pedazos del problema de Cauchy. Entonces $w = u - v$ tiene como condición inicial $w(0) = 0$ c.d.s. Por el teorema 3.2,

$$0 \leq \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1} \leq \|u(\cdot, 0) - v(\cdot, 0)\|_{L^1} = 0,$$

para todo $t \geq 0$, es decir, $w = 0$, c.d.s., y la solución es única en dicha clase. □

Referencias

[1] P. D. Lax, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, no. 11 in CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1973.

[2] O. A. Oleĭnik, *Discontinuous solutions of non-linear differential equations*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **26** (1963), pp. 95–172.

[3] B. K. Quinn, *Solutions with shocks: An example of an L_1-contractive semigroup*, Comm. Pure Appl. Math. **24** (1971), pp. 125–132.

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Escolar s/n, C.P. 04510 Cd. de México (México)

Email address: `plaza@aries.iimas.unam.mx`