

TEMAS SELECTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES  
SISTEMAS HIPERBÓLICOS DE LEYES DE CONSERVACIÓN  
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
(6 CRÉDITOS)  
SEMESTRE 2022-2

RAMÓN G. PLAZA

CONTACTO

- Ramón G. Plaza  
E-mail: [plaza@mym.iimas.unam.mx](mailto:plaza@mym.iimas.unam.mx)

INFORMACIÓN GENERAL

**Nota importante.**

- Este curso se impartirá **en línea** a través de la plataforma [Zoom](#).
- Utilizaremos una licencia de la UNAM para dicha plataforma. Los estudiantes requieren únicamente un *browser* (Google Chrome o Firefox) e instalar el cliente de Zoom. Pueden encontrar las instrucciones en el sitio de [Aulas Virtuales](#) de la UNAM.
- Los alumnos oyentes son bienvenidos, pero el previo registro de todos los asistentes es **obligatorio**. Favor de enviar un correo a [plaza@mym.iimas.unam.mx](mailto:plaza@mym.iimas.unam.mx) para tal efecto.
- La primera reunión (virtual) se llevará a cabo el próximo **lunes 31 de enero del 2022 a las 17:00 hrs.** La liga para esta primera reunión (así como las ligas para el resto de las lecciones del curso) se las haré llegar por correo electrónico unos minutos antes de empezar.

**Horario.**

- Las clases se llevarán a cabo los **lunes, miércoles y viernes de 17:00 a 18:00 hrs.** a través de la plataforma Zoom.
- Se utilizará la opción *sala de reunión* de Zoom, en la que se reserva el espacio virtual y requiere un código único de acceso. Es necesario registrarse conmigo por correo para tal efecto.

**Horas de oficina.**

- Las horas de oficina se destinarán a atender a los alumnos con dudas y aclaraciones sobre el contenido del curso. No hay un horario fijo. Las citas se agendan mediante correo electrónico y se utilizará la plataforma Zoom.

**Página del curso.**

- La página del curso contendrá todos los anuncios relacionados con el mismo, así como el calendario, temario y todo material auxiliar.
- La liga permanente de la página del curso es:  
<http://mym.iimas.unam.mx/ramon/LeyesConservacion-2022-2.html>

**Evaluación.**

Se evaluará al alumno con una exposición final de un artículo de investigación.

**Calendario.**

- Periodo de clases: 31 de enero al 27 de mayo, 2022.
- Periodo de exámenes: 30 de mayo al 10 de junio, 2022.
- Días inhábiles: 7 de febrero, 21 de marzo y 10 de mayo, 2022.
- Vacaciones: 11 al 17 de abril, 2022.

**Objetivo.** Introducir al estudiante a la teoría de soluciones a sistemas hiperbólicos de leyes de conservación. Se discutirán, entre otros temas: ecuaciones escalares, la fórmula de Lax-Hopf, teoría de Kružkov-Oleñik, soluciones débiles a sistemas no lineales de leyes de conservación, condiciones de entropía, el problema de Riemann, ondas de choque, ondas de rarefacción, invariantes de Riemann, discontinuidades de contacto, así como la solución al problema de Cauchy para sistemas.

**Pre-requisitos.** Sólidas bases de Análisis Funcional y Análisis Real.

## TEMARIO

1. Generalidades
  - 1.1 Leyes de conservación y leyes de balance: modelos y ejemplos
  - 1.2 Soluciones débiles, condiciones de salto de Rankine-Hugoniot
  - 1.3 Hiperbolicidad y simetrizabilidad
  - 1.4 Entropía y flujo de entropía
  - 1.5 Condiciones de admisibilidad
  - 1.6 Aproximación viscosa
2. Ecuación escalar en una dimensión espacial
  - 2.1 Soluciones débiles y condiciones de entropía
  - 2.2 Solución entrópica para flujo convexo: la fórmula de Lax-Hopf
  - 2.3 Ondas  $N$
  - 2.4 El problema de Riemann
  - 2.5 Teoría de Kružkov-Oleñik
  - 2.6 Aplicaciones
3. Sistemas de leyes de conservación en una dimensión espacial
  - 3.1 Invariantes de Riemann
  - 3.2 Ondas de rarefacción y discontinuidades de contacto
  - 3.3 Ondas de choque
  - 3.4 Condiciones de entropía de Lax, Oleñik y Liu-Oleñik
  - 3.5 Solución al problema de Riemann
  - 3.6 Aplicaciones a dinámica de fluidos compresibles
  - 3.7 Teorema de representación de Lax

- 3.8 Existencia de soluciones entrópicas al problema de Cauchy I: el esquema de Glimm
- 3.9 Existencia de soluciones entrópicas al problema de Cauchy II: teoría de Bianchini-Bressan

## BIBLIOGRAFÍA

Los libros clásicos sobre el tema son: Serre [12, 13], Smoller [14], Dafermos [3] y Bressan [2]. Se complementarán estas referencias con material de otros textos y de artículos de investigación, tales como el artículo seminal de Lax [6]. Un par de libros introductorios muy recomendables son el de Lax [7] y el de Liu [10]. Para ondas de choque no clásicas el libro de LeFloch [8] es una buena referencia. Para la teoría de Kružkov-Oleĭnik recomiendo las notas de Godlewski y Raviart [4]. Excelentes introducciones a métodos numéricos se pueden encontrar en las notas de LeVeque [9] y el libro de Godlewski y Raviart [5]. Para sistemas en varias dimensiones espaciales el estudiante es referido a los libros de Benzoni-Gavage y Serre [1] y Majda [11].

## REFERENCIAS

- [1] S. BENZONI-GAVAGE AND D. SERRE, *Multidimensional hyperbolic partial differential equations: First-order systems and applications*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press - Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [2] A. BRESSAN, *Hyperbolic systems of conservation laws*, vol. 20 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Oxford University Press, Oxford, 2000. The one-dimensional Cauchy problem.
- [3] C. M. DAFERMOS, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, vol. 325 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin, fourth ed., 2016.
- [4] E. GODLEWSKI AND P.-A. RAVIART, *Hyperbolic systems of conservation laws*, vol. 3-4 of Mathématiques et Applications, Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, Éditions Ellipses, Paris, 1991.
- [5] ———, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, vol. 118 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [6] P. D. LAX, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957), pp. 537–566.
- [7] ———, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, no. 11 in CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1973.
- [8] P. G. LEFLOCH, *Hyperbolic systems of conservation laws: The theory of classical and non-classical shock waves*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
- [9] R. J. LEVEQUE, *Numerical methods for conservation laws*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, second ed., 1992.
- [10] T.-P. LIU, *Hyperbolic and Viscous Conservation Laws*, vol. 72 of CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 2000.
- [11] A. MAJDA, *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*, vol. 53 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [12] D. SERRE, *Systems of Conservation Laws 1. Hyperbolicity, entropies, shock waves*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.
- [13] ———, *Systems of Conservation Laws 2. Geometric structures, oscillations and initial-boundary value problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.
- [14] J. SMOLLER, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York, Second ed., 1994.