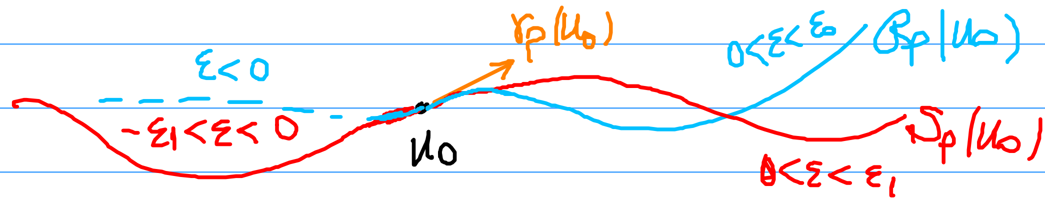
Lección 3.9 : Ondas de choque y discontinuidades de contacto. Condiciones de entropía de Lax.

$A(u) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n})$, $1 \le p \le n$ p-campo simple. Sea $u_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

- curva de rarefacción:

$\mathcal{R}_p(u_0) \subset \Omega$ estados que se pueden conectar con u_0 por la derecha mediante una onda de rarefacción

$$\mathcal{R}_p(u_0) = \Big\{ \Phi_p(\varepsilon) = u_0 + \varepsilon r_p(u_0) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 Dr_p(u_0) r_p(u_0) + O(\varepsilon^3), \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \Big\}$$



- Curva de Hugoniot local

$\mathcal{S}_p(u_0) \subset \mathcal{H}_p(u_0) \subset \Omega$ estados que satisfacen RH con u_0 sobre el p-campo

$$\mathcal{S}_p(u_0) = \{ \Psi_p(\varepsilon) : \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \} \subset \mathcal{H}(u_0)$$

$$\Psi_p(\varepsilon) = u_0 + \varepsilon r_p(u_0) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 Dr_p(u_0) r_p(u_0) + O(\varepsilon^3)$$

$$\sigma(u_0, \Psi_p(\varepsilon)) = \lambda_p(u_0) + \frac{\varepsilon}{2} D\lambda_p(u_0)^T r_p(u_0) + O(\varepsilon^2)$$

Nota: para las expresiones de $\Psi_p(\varepsilon)$ y $\Phi_p(\varepsilon)$ adoptamos la misma normalización de r_p

Corolario Si $A \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n})$ es estrictamente hiperbólica el conjunto de Hugoniot completo de $u_0 \in \Omega$ está constituido localmente por n curvas suaves de la forma

$$S_j(u_0) = \{ \Psi_j(\varepsilon) : -\varepsilon_j < \varepsilon < \varepsilon_j \ll 1 \}$$

$$\sigma(u_0, u) \sim \lambda_j(u_0) \quad \text{si } u \in S_j, \; 1 \leq j \leq n$$

Curvas de choque

$u_0 \in \Omega$ fijo, p-campo simple y genuinamente nolineal ("convexo").

Normalización: $D\lambda_p(u_0)^T r_p(u_0) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} f'' \geq \delta > 0 \\ f'' \leq -\delta < 0 \end{array}\right\} \quad f \to -f \quad \text{convexo}$$

Velocidad de conexión:

$$\sigma(u_0, \Psi_p(u_0)) = \sigma(\varepsilon) = \lambda_p(u_0) + \frac{1}{2}\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Así,

$$\lambda_p(\Psi_p(\varepsilon)) = \lambda_p(\Psi_p(0)) + \varepsilon \, D\lambda_p(\Psi_p(0))^T \times$$
$$\times \left(\frac{d}{d\varepsilon}\Psi_p(\varepsilon)\right)\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$\lambda_p(u_R) = \lambda_p(u_L) + \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$+ O(\varepsilon^2)$$

$$= \lambda_p(u_0) + \varepsilon \underbrace{D\lambda_p(u_0)^T r_p(u_0)}_{=1} + O(\varepsilon^2)$$

$$= \lambda_p(u_0) + \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\lambda_p(\Psi_p(\varepsilon)) + \lambda_p(u_0)\right) +$$
$$+ O(\varepsilon^2)$$

Burgers $\quad s = \frac{1}{2}\left(f'(u_R) + f'(u_L)\right)$

$$= \frac{1}{2}(u_R + u_L) \qquad f(u) = \frac{1}{2}u^2$$

Discontinuidades de contacto

p-campo linealmente degenerado

$$D\lambda_p(u)^T r_p(u) = 0 \qquad \forall u \in \Omega.$$

Curva integral del campo r_p:

$$v'(\xi) = r_p(v(\xi))$$
$$v(0) = u_0$$

Entonces,

$$\frac{d}{d\xi}\Big[f(v(\xi)) - f(u_0) - \lambda_p(v(\xi))(v(\xi)-u_0)\Big]$$

$$= \big[A(v(\xi)) - \lambda_p(v(\xi))\big]\underbrace{v'(\xi)}_{=r_p(v(\xi))} +$$

$$- \underbrace{\left(D\lambda_p(v(\xi))^T v'(\xi)\right)}_{= D\lambda_p(v(\xi))^T r_p(v(\xi)) = 0} (v(\xi)-u_0)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \quad f(v(\xi)) - f(u_0) - \lambda_p(v(\xi))(v(\xi)-u_0)$$

$$= C \quad \text{constante.}$$

como $v(0) = \xi_0 \quad \Rightarrow \quad C = 0.$

$$\therefore \quad f(v(\xi)) - f(u_0) = \lambda_p(v(\xi))(v(\xi)-u_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad v(\xi) \in S_p(u_0)$$

con velocidad de conexión

$$\sigma(u_0, v(\xi)) = \lambda_p(v(\xi))$$

Finalmente, λ_p es un p-invariante de Riemann local

$$\Rightarrow \quad \sigma(u_0, v(\xi)) = \lambda_p(v(\xi)) \equiv \lambda_p(u_0)$$

Lema Si el p-campo es linealmente degenerado entonces el conjunto local de Hugoniot, $S_p(u_0)$, es la curva integral de r_p que pasa por u_0 y la velocidad de conexión es constante

$$\sigma(u_0, \Psi_p(\varepsilon)) \equiv \lambda_p(u_0) \quad \forall\ \varepsilon \sim 0$$

Además, para todo p-invariante de Riemann local

$$w(\Psi_p(\varepsilon)) = w(u_0) \quad \forall\ \varepsilon \sim 0.$$

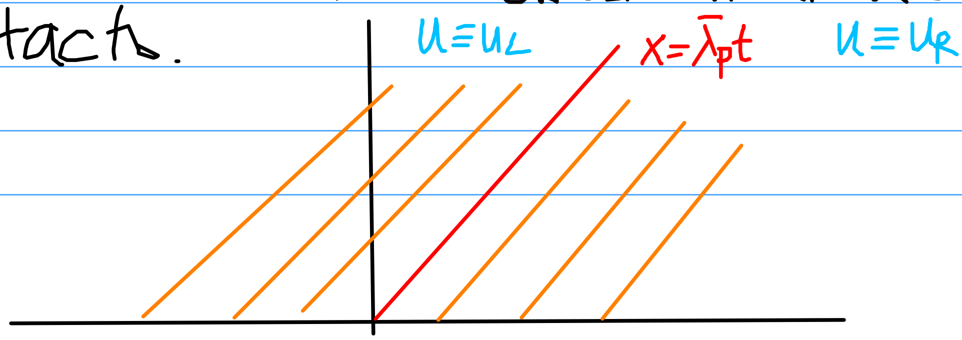
Sean u_L, u_R, $u_L \neq u_R$ con

$$u_R \in S_p(u_L)$$

La solución débil discontinua

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < \bar{\lambda}_p t \\ u_R, & x > \bar{\lambda}_p t \end{cases}$$

donde $\bar{\lambda}_p \equiv \lambda_p(u_R) = \lambda_p(u_L)$, si el campo es linealmente degenerado, se le conoce como discontinuidad de contacto.



Definición (condiciones de entropía de Lax)

Se dice que una discontinuidad,

$$\Sigma = \{(x,t) : x = \hat{x}(t), \ \hat{x} \in C^1\}$$

con límites definibles a cada lado de Σ en cada punto $P \in \Sigma$

$$u_R = \lim_{\varepsilon \to 0^+} u((x,t) + \varepsilon \hat{n})$$

$$u_L = \lim_{\varepsilon \to 0^+} u((x,t) - \varepsilon \hat{n})$$

$\hat{n}$ normal en P a Σ que apunta al "lado derecho", satisface las condiciones de entropía de Lax si existe $1 \leq p \leq n$ tal que

$$\underbrace{s := \frac{d\hat{x}}{dt}}_{\text{velocidad de } \Sigma}$$

satisface

$$\lambda_p(u_R) \leq s \leq \lambda_{p+1}(u_R)$$

$$\lambda_{p-1}(u_L) \leq s \leq \lambda_p(u_L)$$

Si el p- campo es genuinamente no lineal necesariamente se tiene

$$\lambda_p(u_L) > s > \lambda_p(u_R) \quad (\Leftarrow) \quad \lambda_p(u_R) = \lambda_p(u_L) - |\varepsilon| + O(\varepsilon^2)$$

$$\lambda_p(u_R) < s < \lambda_{p+1}(u_R)$$

$$\lambda_{p-1}(u_L) < s < \lambda_p(u_L)$$

Si el p-campo característico es linealmente degenerado entonces necesariamente

$$\lambda_p(u_L) = s = \lambda_p(u_R)$$

<u>Corolario</u> Una discontinuidad que separa a u_L de u_R, $u_L \neq u_R \in \Omega$, y $u_L \sim u_R$, satisface la condición de entropía de Lax si y sólo si

$$u_R \in S_p^-(u_L) := \left\{ \Psi_p(u_L) = u_L + \varepsilon r_p(u_L) + O(\varepsilon^2) \quad \text{con} \quad -\varepsilon_1 < \varepsilon < 0 \right\}$$