Lección 3.7 : Ondas simples (continuación). Ondas de choque.

Clase pasada:

Lema 1 $u : Q \to \Omega$, $p$-onda simple, $1 \leq p \leq n$. $Q \subset \mathbb{R} \times (0,\infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Entonces las curvas características

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \lambda_p(u(\hat{x}(t),t))$$

son líneas rectas sobre las cuales $u$ es constante.

Lema 2 $u : Q \to \Omega$, $p$-onda simple. Entonces el conjunto de valores de $u$ está restringido a una sola curva integral de $r_p$ en $\mathbb{R}^n$.

Lema 3 $u : Q \to \Omega$ es una $p$-onda simple si y sólo si

$$u = v(\varphi(x,t)) \qquad \ldots \quad (1)$$

donde $v \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ es una curva integral de $r_p$:

$$\left.\begin{aligned} v'(\xi) &= r_p(v(\xi)) \\ v(\xi_0) &= v_0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \quad (2)$$

con $\xi, \xi_0 \in I \subset \mathbb{R}$ y la función escalar $\varphi \in C^1(Q; I)$ satisface:

$$\frac{d\varphi}{dp} := \varphi_t + \lambda_p(\underbrace{v(\varphi)}_{})\varphi_x = 0 \quad \cdots (3)$$

Demostración: "$\Rightarrow$" Por el lema 2, los valores de $u$ están restringidos a una sola curva integral de $r_p$.

$\Rightarrow$ por el teorema de Picard existe una solución local de (2) tal que $u$ tiene la forma (1).

Como $u$ es solución clásica:

$$0 = u_t + f(u)_x$$

$$= u_t + A(u)u_x$$

$$= \varphi_t v'(\varphi) + \varphi_x \overbrace{A(v(\varphi))v'(\varphi)}^{= \lambda_p(v(\varphi)) r_p(v(\varphi))}$$

$$= [\varphi_t + \lambda_p(v(\varphi))\varphi_x] r_p(v(\varphi))$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_t + \underbrace{\lambda_p(v(\varphi))}_{}\varphi_x = 0. \qquad ((3)).$$

$u$ $p$-onda simple $\Rightarrow$ $u$ es cte. sobre características (líneas rectas)

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \lambda_p(u(\hat{x}(t),t)) = \lambda_p(v(\varphi(x,t)))$$

$$=: \overline{\lambda_p}$$

velocidad constante

$$\Rightarrow \quad \varphi(x,t) = \varphi_0(x - \lambda_p t) \quad \cdots \quad (4)$$

"$\Leftarrow$" Definimos $u$ mediante (1).

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= u_t + A(u)u_x \\ &= [\varphi_t + \lambda_p(v(\varphi))\varphi_x]\, r_p(v(\varphi)) \\ &\underset{(3)}{=} 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ $u$ es solución clásica en $Q$.

Sea $w$ un $p$-invariante de Riemann local. Entonces,

$$\tilde{w}(x,t) := w(v(\varphi(x,t)))$$

tiene como gradiente

$$\begin{aligned} D_{(x,t)}\tilde{w} &= \begin{bmatrix} Dw(v(\varphi))^T v'(\varphi)\varphi_t \\ Dw(v(\varphi))^T v'(\varphi)\varphi_x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Dw(v(\varphi))^T r_p(v(\varphi))\ \varphi_t \\ \underbrace{Dw(v(\varphi))^T r_p(v(\varphi))}_{=0 \text{ ya que } w \text{ es } p\text{-invariante de Riemann.}}\ \varphi_x \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \tilde{w}$ es constante.

$\Rightarrow$ $u$ es una p-onda simple

$\square$

Observación:

La fórmula (4) es una onda viajera con velocidad constante.

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = v(\varphi_0(x - \bar{\lambda} t)) \qquad \cdots \quad (5)$$

En algunos textos (5) es la def. de onda simple.

Idea: interpretar (3) como una ley de conservación escalar, una vez que sea resuelto (2). (Proyección no lineal sobre el p-campo).

Ejemplos:

(A) p-campo genuinamente no lineal.

Normalización:

$$\frac{d}{d\xi} \lambda_p(v(\xi)) = D\lambda_p(v(\xi))^T v'(\xi)$$
$$= D\lambda_p(v(\xi))^T r_p(v(\xi)) \equiv 1.$$

$$\exists \quad \lambda_p\left(v(\varphi(x,t))\right) = \varphi(x,t)$$

La ecuación (3) es:

$$\varphi_t + \varphi\varphi_x = 0 \quad \cdots \quad (6)$$

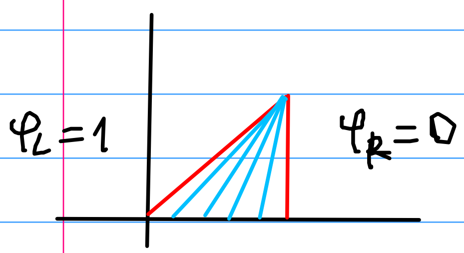
ec. de Burgers.

Solución clásica: $\varphi \begin{cases} = \dfrac{x}{t}. \\ = \dfrac{x-x_0}{t-t_0} \end{cases}$

onda de rarefacción.

$\exists$ ondas simples que no son ondas de rarefacción

$$\varphi(x,t) = \frac{x-1}{t-1}$$




$$t \leq x < 1, \quad 0 \leq t < 1$$

Onda de compresión

(B) campo linealmente degenerado:

No hay solución al sistema de ecuaciones. Pero sabemos que

$w(u) = \lambda_p(u)$ es p-invariante de Riemann

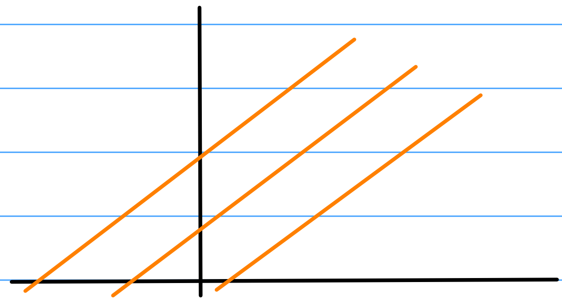
$\Rightarrow$ $\lambda_p$ es constante sobre cualquier p-onda simple

$$\lambda_p(u(x,t)) = \lambda_p := \bar{\lambda}_p = \lambda_p | v(\varphi(x,t)))$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = v(\varphi_0(x - \bar{\lambda}_p t))$$

curvas características : rectas paralelas

$$x = \bar{\lambda}_p t + \varphi_0$$



Si el p-campo es linealmente degenerados, dos estados $u_L \neq u_R$ no pueden ser conectados mediante una p-onda simple continua.

$\Rightarrow$ discontinuidad de contacto.

## Ondas de choque y discontinuidades de contacto.

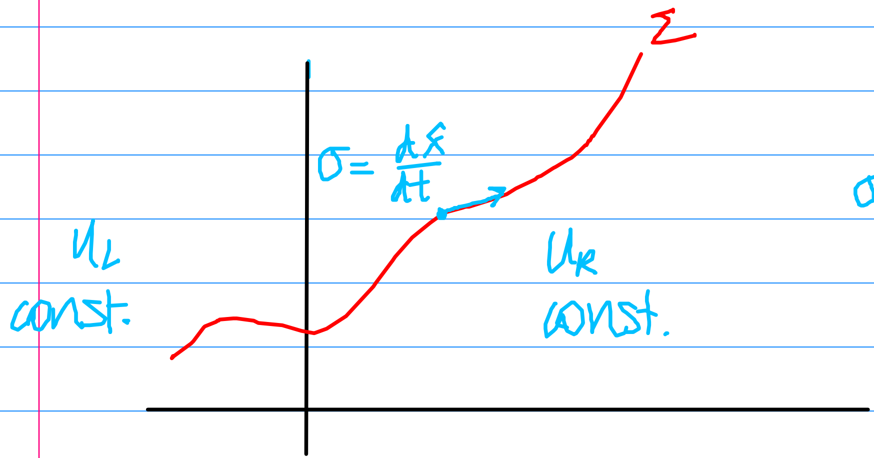
Sean $u_L \neq u_R$, en $\Omega$.

Si una solución débil $C^1$ por pedazos tiene una discontinuidad

$$\Sigma = \{ (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty) : x = \hat{x}(t), \ \hat{x} \in C^1((0,\infty)) \}$$

se debe ampliar

$$\underbrace{\frac{d\hat{x}}{dt}}_{=\sigma}[u] = [f(u)] \qquad \cdots \quad (1)$$




$\sigma[u_R - u_L] = f(u_R) - f(u_L)$

Ondas de choque:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < st \\ u_R, & x > st \end{cases} \qquad \cdots \quad (2)$$

$s \in \mathbb{R}$, $\qquad s[u] = [f(u)]$

## El conjunto de Hugoniot

Definición Dado un estado constante $u_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, el conjunto de Hugoniot de $u_0$

$$\mathcal{H}(u_0) \subset \Omega$$

es el conjunto de estados $u \in \Omega$ tales que existe $\sigma(u_0, u) \in \mathbb{R}$ que satisface

$$\sigma(u_0, u)\,(u - u_0) = f(u) - f(u_0). \quad \cdots (3)$$

<u>Teorema</u> (de representación de Lax)

Sea $u_0 \in \Omega$ fijo. Supongamos que el $p$-campo característico, $1 \le p \le n$, tiene $\lambda_p(u)$ velocidad <u>simple</u>, $\forall u \in N(u_0)$ (vecindad de $u_0$). Entonces existe una curva de estados en $\Omega$, de clase $C^2$, $S_p(u_0) : \varepsilon \to \Psi_p(\varepsilon)$ definida en $-\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_1$ con $0 < \varepsilon_1 << 1$ tal que

$$S_p(u_0) = \left\{ \Psi_p(\varepsilon) \in \Omega : \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \right\}$$

$$\subset H(u_0) \quad \cdots (4)$$

Mas aún, podemos escoger una parametrización tal que

$$(5) \begin{cases} \Psi_p(\varepsilon) = u_0 + \varepsilon r_p(u_0) + \dfrac{\varepsilon^2}{2} Dr_p(u_0) r_p(u_0) + O(\varepsilon^3) \\ \sigma(u_0, \Psi_p(\varepsilon)) = \lambda_p(u_0) + \dfrac{\varepsilon}{2} D\lambda_p(u_0)^T r_p(u_0) + O(\varepsilon^2). \end{cases}$$