Lección 3.6 : Ondas simples.

Definición Una función suave

$$u : Q \longrightarrow \mathcal{N} \subseteq \Omega \qquad \cdots (1)$$

solución del sistema de leyes de conservación y definida en un dominio $Q \subseteq \mathbb{R} \times (0,\infty)$ es llamada una p-onda simple, $1 \leq p \leq n$, si la función

$$\left. \begin{aligned} h(x,t) &:= w(u(x,t)) \\ h &: Q \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \qquad \cdots (2)$$

es constante para cualquier p-invariante de Riemann local, $w : \mathcal{N} \subset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

Lema 1 Sea

$$\frac{d}{dp} := \partial_t + \lambda_p \partial_x$$

$$\frac{du}{dp} = u_t + \lambda_p(u) u_x$$

la derivada en dirección del p-campo característico, $1 \leq p \leq n$. Entonces $u = u(x,t)$ es solución clásica de

$$u_t + f(u)_x = 0 \qquad \cdots (3)$$

si y sólo si $\quad \ell_p(u)\dfrac{du}{dp} = 0.$

Demostración $\quad u = u(x,t) \in C^1$ es solución clásica de (3) si y sólo si

$$u_t + A(u)u_x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \ell_p(u)\,u_t + \ell_p(u)A(u)u_x$$

$$= \ell_p(u)\left[u_t + \lambda_p(u)u_x\right]$$

$$= \ell_p(u)\frac{du}{dp}$$

$\square$

Lema 2 $\quad$ Sea $u : Q \to \Omega$ una p-onda simple en $Q \subset \mathbb{R}\times(0,\infty)$. Entonces las curvas características del p-campo, es decir, las curvas de la forma

$$\begin{cases} \{(\hat{x}(t),t)\} \subset Q \\ \dfrac{d\hat{x}}{dt} = \lambda_p(u(\hat{x}(t),t)) \end{cases}$$

son líneas rectas a lo largo de las cuales u es constante.

Demostración Por el lema 1,

$$(4)\cdots \qquad l_p \cdot \frac{du}{dp} = 0.$$

Si $w_1, \ldots, w_{n-1}$ son p- invariantes de Riemann entonces las funciones

$$\tilde{w}_j(x,t) := w_j(u(x,t)), \qquad 1 \leq j \leq n-1$$

son constantes en Q. Así,

$$(5)\cdots \quad 0 = \frac{d\tilde{w}_j}{dp} = Dw_j^T \frac{du}{dp}, \qquad 1 \leq j \leq n-1$$

Sabemos que $\exists$ $n-1$ invariantes de Riemann locales, w_j, $1 \leq j \leq n-1$, satisfacen (5).

Escribimos (4) y (5) de manera que

$$M(u)\frac{du}{dp} = 0 \qquad \cdots (6)$$

donde $M(u) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ está dada por:

$$M(u) := \begin{pmatrix} l_p(u) \\ Dw_1(u)^T \\ \vdots \\ Dw_{n-1}(u)^T \end{pmatrix}$$

Sea una combinación lineal de los renglones de $M(u)$ igual a cero:

$$\alpha \ell_p(u) + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \, Dw_j(u)^T = 0$$

Tomando el producto con $r_p(u)$:

$$\alpha \underbrace{\ell_p(u) r_p(u)}_{=1} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \underbrace{Dw_j(u)^T r_p(u)}_{=0 \quad \forall \; 1 \leq j \leq n-1} = 0$$

$\therefore \; \alpha = 0.$

Pero $\{ Dw_j(u) \}_{j=1}^{n-1}$ es un conjunto linealmente independiente. $\therefore \; \alpha_j = 0 \quad \forall \; 1 \leq j \leq n-1$

Así, $M(u)$ es invertible.

$$\therefore \; (6) \Rightarrow \frac{du}{dp} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad u_t + \lambda_p(u) u_x = 0$$

$\therefore$ sobre las curvas características u es constante y $\lambda_p(u)$ es constante

$\therefore$ son rectas $\square$

Lema 3 Sea u una p-onda simple. Entonces el conjunto de valores que toma u está restringido a una sola curva integral de r_p en $\mathbb{R}^n$.

Demostración $u : Q \to \Omega$ p-onda.

Por encontrar: un p-invariante de Riemann cuyos valores constantes en dos curvas integrales de r_p son distintos.

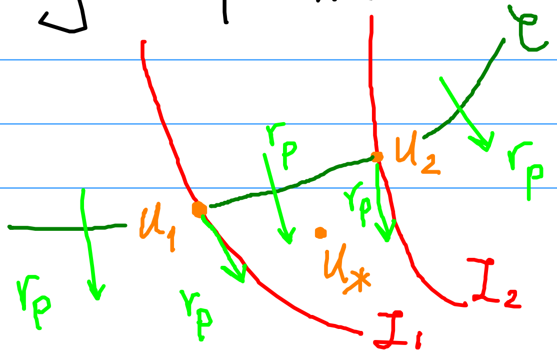
Sean $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ dos curvas integrales de r_p en una recindad $\mathcal{N}(u_*)$ de $u_* \in \Omega$, de modo que $u_1 \in \mathcal{I}_1$, $u_2 \in \mathcal{I}_2$, y $u_1, u_2 \in \mathcal{N}(u_*)$.

Sea $\mathcal{C}$ una curva de estados en $\mathcal{N}(u_*)$ tal que

- $\mathcal{C} = \{ \hat{u}(\xi) \in \mathcal{N}(u_*) : \xi \in J \subset \mathbb{R} \}$

  con $\hat{u} \in C^1$

- $\mathcal{C}$ no es tangente a r_p en ningún punto.



Lema anterior: $\exists\ w_j : \mathcal{N}(u_*) \to \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n-1$

p-invariantes de Riemann locales cuyos gradientes son linealmente independientes.

$$\Rightarrow \quad \operatorname{span}\{ Dw_1(u), \dots, Dw_{n-1}(u) \} = \{ r_p(u) \}^{\perp}$$

$$\forall\, u \in \mathcal{N}(u_*).$$

Dado que $\mathcal{C}$ es transversal a $r_p(u)$ entonces la proyección de $\hat{u}'(\xi)$ en $\{r_p(u)\}^{\perp}$ es siempre $\neq 0$, es decir,

$$\hat{u}'(\xi)^T \left[\sum_{j \neq p} \alpha_j\, Dw_j(\hat{u}(\xi)) \right] \neq 0 \qquad \forall\, \xi \in J.$$

Sea

$$w(u) := \sum_{j \neq p} \alpha_j\, w_j(u).$$

Entonces w es un p-invariante de Riemann:

$$Dw(u)^T r_p(u) = \sum_{j \neq p} \alpha_j\, \underbrace{Dw_j(u)^T r_p(u)}_{=0} = 0.$$

$$\forall\, u \in \mathcal{N}(u_*).$$

Así,

$$\frac{d}{d\xi} w(\hat{u}(\xi)) = \hat{u}'(\xi)^T \sum_{j \neq p} \alpha_j Dw_j(\hat{u}(\xi))$$

$$\neq 0$$

Además, no cambia de signo.

$\therefore$ $\xi \mapsto w(\hat{u}(\xi))$ es estrictamente monótona en $\xi \in J$.

$\Rightarrow$ w toma valores distintos en distintas curvas integrales de r_p.

Finalmente, si suponemos que u es una p-onda simple y $w(u)$ es constante en Q entonces u toma valores sobre una única curva integral de r_p.

$\square$