Lección 3.5 : Invariantes de Riemann: existencia. Ondas simples.

$f \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo.

$A(u) = Df(u) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n})$ estrictamente hiperbólica con :

$\lambda_1(u) < \dots < \lambda_n(u)$ $\qquad \begin{Bmatrix} r_1(u), \dots, r_n(u) \\ l_1(u), \dots, l_n(u) \end{Bmatrix}$

valores propios $\lambda_j \in \mathbb{R}$ $\qquad$ vectores propios $\begin{Bmatrix} \text{derechos} \\ \text{izquierdos} \end{Bmatrix}$

Invariantes de Riemann : $w \in C^1(\mathcal{N}; \mathbb{R})$ $w : \mathcal{N} \subset \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{N}$ vecindad de Ω es un p-invariante de Riemann local si

$$Dw(u)^T r_p(u) = 0 \quad \forall\, u \in \mathcal{N} \qquad \dots (1)$$

$1 \leq p \leq n$.

Vamos a demostrar la existencia local de $n-1$ invariantes de Riemann cuyos gradientes son linealmente independientes.

<u>Definición</u> Una hipersuperficie de $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{S} = \{ u \in \mathbb{R}^n : \psi(u) = 0 \} \qquad \dots (2)$$

donde $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable, se denomina p-característica, $1 \leq p \leq n$, si

$$D\psi(u)^T r_p(u) = 0 \qquad \cdots (3)$$

$\forall u \in S$, es decir, si r_p es tangente a S.

Lema 1 Supongamos que el hiperplano

$$S = \{ u \in \mathbb{R}^n : u_n = 0 \}$$

no es p-característico, con $1 \leq p \leq n$. Entonces existe un cambio suave de coordenadas, invertible

$$u = H(v)$$

definido en una vecindad de S tal que la condición (1) es equivalente a

$$\frac{\partial z}{\partial v_n} = 0 \qquad \cdots (4)$$

donde $z(v) := w(H(v))$ para todo p-invariante de Riemann. Mas aún, las n-1 funciones

$$w_j(u) := z_j(H^{-1}(u)), \quad j = 1, \dots, n-1 \qquad \cdots (5)$$

donde $z_j := v_j \; \forall j$, son p-invariantes de Riemann cuyos gradientes son linealmente independientes.

<u>Demostración</u> Sea $\{\hat{e}_j\}_{j=1}^{n}$ base canónica de $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Para toda función diferenciable, $z:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $z = z(v)$,

$$\frac{\partial z}{\partial v_n} = Dz(v)^T \hat{e}_n$$

Suponiendo que el mapeo H existe. $z := w(H(v))$ donde $w:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial v_n} = Dz(v)^T \hat{e}_n = \left(Dw(H(v))\, DH(v)\right)^T \hat{e}_n$$

$$= Dw(u)\, \frac{\partial H}{\partial v_n}$$

Así, la condición (1) es equivalente a (4) si y sólo si

$$\frac{\partial H(v)}{\partial v_n} = r_p(H(v)) \qquad \cdots \qquad (6)$$

Resolvemos (6) con condición inicial

$$H(v_*) = H(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, 0)$$

$$= (v_1, \ldots, v_{n-1}, 0) =: v_*$$

sobre cualquier $v_* \in S$ arbitrario pero fijo.

Por el teorema de Picard $\forall v_* \in S$ existe una solución local de (6) con condición inicial $H(v_*) = v_*$ cerca de $v_n = 0$, digamos para $v_n \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$.

Por hipótesis S <u>no</u> es p-característico

$$\frac{\partial H}{\partial v_n}(v_*) = r_p(H(v_*)) = r_p(v_*) \notin S$$

es decir, la n-ésima componente de $r_p(v_*)$ es $\neq 0$. Por otro lado,

$$\frac{\partial H}{\partial v_j}(v_*) = \frac{\partial}{\partial v_j}(v_1, \dots, v_{n-1}, 0) = \hat{e}_j \neq 0 \qquad \forall j \neq n$$

donde $\hat{e}_j \in S$, $j \neq n$. De este modo el jacobiano

$$DH(v_*) = \left(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_{n-1}, r_p(v_*)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ * \quad\quad * & \underbrace{\boxed{*}}_{\neq 0} \end{pmatrix}$$

es no singular. Así, el mapeo $v \mapsto H(v)$, definido en una vecindad de $\{v_n = 0\}$ es inyectivo, sobre y diferenciable con matriz jacobiana $D\textcircled{H}(v)$, invertible

Por construcción las funciones

$$z_j(v) := v_j, \quad j \neq n$$

satisfacen $\dfrac{\partial z_j}{\partial v_n} = 0$ por lo que las correspondientes funciones

$$w_j(u) := z_j(\textcircled{H}^{-1}(u)), \quad j \neq n$$

son p- invariantes de Riemann.

Tomando,

$$0 = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \, Dw_j(u)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \left(D\textcircled{H}^{-1}(u)\right)^T \hat{e}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \, \tilde{c}_j(u)$$

donde $\tilde{c}_j(u) = j$- ésima columna de $D\textcircled{H}^{-1}$ (invertible)

$$\Rightarrow \quad \alpha_j = 0$$

$\square$

Ejemplos:

(A) Sistema p:

$$v_t - u_x = 0$$
$$u_t + p(v)_x = 0$$

$p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p'(v) < 0, \quad p''(v) > 0 \quad \forall v.$

$$A(v,u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(v) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -\sqrt{-p'(v)} < 0 < \lambda_2 = \sqrt{-p'(v)}$$

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-p'(v)} \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{-p'(v)} \end{pmatrix}$$

$w_1 = w_1(v,u)$:

$$Dw_1^T r_1 = \partial_v w_1 + \sqrt{-p'(v)}\, \partial_u w_1$$
$$= 0$$

$\Rightarrow$ w_1 es constante sobre curvas

$\{(v, \hat{u}(v)) : v \in \mathbb{R}\}$

donde $\hat{u}'(v) = \sqrt{-p'(v)}$

Si (v,u) es fijo, la característica que pasa por ese punto es

$$\hat{u}(\tilde{v}) = u - \int_{\tilde{v}}^{v} \sqrt{-p'(y)}\, dy$$

$$\Rightarrow w_1(v,u) = w_1(\tilde{v}, \hat{u}(\tilde{v}))$$

$$= w_1(0, \hat{u}(0))$$

$$= w_1\left(0, u - \int_0^v \sqrt{-p'(y)}\, dy\right)$$

Escogiendo la condición inicial

$$w_1(0,u) = u$$

obtenemos

$$w_1(v,u) = u - \int_0^v \sqrt{-p'(y)}\, dy$$

es 1- invariante de Riemann (global).

Análogamente

$$w_2(v,u) = u + \int_0^v \sqrt{-p'(y)}\, dy$$

es 2- invariante de Riemann (global).

Ejercicio: Para Euler

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0$$

$$u_t + uu_x + \frac{p_x}{\rho} = 0$$

$$S_t + uS_x = 0$$

$p = \hat{p}(\rho, S) > 0$, $\hat{p}_\rho > 0$, $\hat{p}_{\rho\rho} > 0$.

$\hat{p} = (\gamma - 1)\rho e$

$\gamma > 1$

Probar que

$$w_1^{(1)} = S$$

$$w_2^{(1)} = u + \frac{2}{\gamma - 1} c(\rho, S)$$

con $c > 0$, $c^2 = \hat{p}_\rho$, son 2 1-invariantes de Riemann.

$$w_1^{(3)} = S$$

$$w_2^{(3)} = u - \frac{2}{\gamma - 1} c(\rho, S)$$

son 3-invariantes de Riemann.

Además,

$$w_1^{(2)} = u$$

$$w_2^{(2)} = \hat{p}(\rho, S)$$

son 2-invariantes de Riemann.