Lección 3.4 : Existencia local de ondas de rarefacción. Invariantes de Riemann.

Sistema de leyes de conservación :

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$u = u(x,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω abierto conexo.
$f \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$. $\quad A(u) = Df(u) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n})$

Velocidades características :

$$(2) \dots \quad \lambda_1(u) < \dots < \lambda_n(u), \qquad \lambda_j(u) \in \sigma(A(u)) \subset \mathbb{R}$$

Vectores propios :
$$A(u) r_j(u) = \lambda_j(u) r_j(u)$$
$$l_j(u) A(u) = \lambda_j(u) l_j(u)$$

$$r_j \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \quad l_j \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

Normalización del p-campo, $1 \leq p \leq n$

$$(3) \dots \begin{cases} D\lambda_p(u)^T r_p(u) \equiv 1 \\ l_p(u) r_p(u) = 1 \end{cases} \quad \forall u \in \Omega$$

si es genuinamente nolineal.

Sistema de EDOs :

$$\left.\begin{aligned} v'(\xi) &= r_p(v(\xi)) \\ \xi &= \lambda_p(v(\xi)) \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (4)$$

para $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$, $\xi_2 > \xi_1$, con

$$\left.\begin{aligned} &\xi_1 = \lambda_p(u_L), \qquad \xi_2 = \lambda_p(u_R) \\ &v(\xi_1) = u_L, \qquad v(\xi_2) = u_R \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

para $u_L, u_R \in \Omega$, $u_L \neq u_R$.

Onda de rarefacción: $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$

$$u(x,t) = v\left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\right)$$

$$\text{si} \quad \lambda_p(u_L) \leq \frac{x-x_0}{t-t_0} \leq \lambda_p(u_R)$$

v solución de (4), (5);

$$u(x,t) \equiv u_R \qquad \text{si} \quad \frac{x-x_0}{t-t_0} > \lambda_p(u_R)$$

$$\text{''} \quad \equiv u_L \qquad \text{si} \quad \frac{x-x_0}{t-t_0} < \lambda_p(u_L)$$

Teorema Supongamos que el p-campo es genuinamente nolineal, $1 \leq p \leq n$, y normalizado según (3). Entonces, para cualquier estado $u_L \in \Omega$ dado existe una curva de estados

$$\mathcal{R}_p(u_L) \subset \Omega$$

tales que pueden ser conectados a u_L por la derecha mediante una onda de rarefacción, es decir, $\forall\ \tilde{u} \in \mathcal{R}_p(u_L)$ se tiene:

- $\lambda_p(\tilde{u}) \geq \lambda_p(u_L)$
- $\exists\ v \in C^1([\lambda_p(u_L), \lambda_p(\tilde{u})]; \mathbb{R}^n)$ que satisface (4), y con condiciones $v(\lambda_p(u_L)) = u_L$, $v(\lambda_p(\tilde{u})) = \tilde{u}$.

Mas aún, existe una parametrización de $\mathcal{R}_p(u_L)$: $\varepsilon \to \Phi_p(\varepsilon) = \tilde{u}$ definida para $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \ll 1$ pequeño tal que

$$\Phi_p(\varepsilon) = u_L + \varepsilon r_p(u_L) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 Dr_p(u_L) r_p(u_L) + O(\varepsilon^3)$$

(6) ...

Demostración: Para todo $\xi_0 \in \mathbb{R}$, por el teorema de Picard existe una única solución de

$$\begin{aligned} v'(\xi) &= r_p(v(\xi)), \qquad \xi > \xi_0 \\ v(\xi_0) &= u_L \end{aligned}$$

para $\xi \in [\xi_0, \xi_0 + \varepsilon_0)$, con $0 < \varepsilon_0 \ll 1$.
Escogiendo $\xi_0 := \lambda_p(u_L)$ y derivando

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}\left(\lambda_p(v(\xi))\right) &= D\lambda_p(v(\xi))^T v'(\xi) \\ &= D\lambda_p(v(\xi))^T r_p(v(\xi)) \underset{(3)}{\equiv} 1 \end{aligned}$$

Así, $\lambda_p(v(\xi)) = \xi$, ya que $\lambda_p(v(\xi_0)) = \lambda_p(u_L)$. Definimos

$$(7) \cdots \quad \mathcal{Q}_p(u_L) := \left\{ v(\xi) \; : \; \lambda_p(u_L) \leq \xi \leq \lambda_p(u_L) + \varepsilon_0 \right\} \subset \Omega$$

es el conjunto de estados que se pueden conectar con u_L por la derecha mediante una p-onda de rarefacción.

Sea $\quad \Phi_p(\varepsilon) := v(\lambda_p(u_L) + \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$

$$\Rightarrow \quad \Phi_p(0) = v(\lambda_p(u_L)) = u_L$$

$$\Phi_p'(\varepsilon) = v'(\lambda_p(u_L) + \varepsilon)$$

$$= r_p(v(\lambda_p(u_L) + \varepsilon))$$

$$\Phi_p'(0) = r_p(u_L)$$

$$\Phi_p''(\varepsilon) = Dr_p(v(\lambda_p(u_L) + \varepsilon))\, v'(\lambda_p(u_L) + \varepsilon)$$

$$= Dr_p(v(\lambda_p(u_L + \varepsilon))\, r_p(\lambda_p(u_L) + \varepsilon)$$

$$\Phi_p''(0) = Dr_p(u_L)\, r_p(u_L)$$

$\Rightarrow$ obtenemos la expansión (6)

$\square$

Observaciones: $\mathcal{R}_p(u_L)$ es llamada la p-curva de rarefacción por la derecha. Tangente a $r_p(u_L)$ en el punto u_L.

Invariantes de Riemann

Definición una función escalar suave (al menos de clase C^1), $w: \mathcal{N} \subset \Omega \to \mathbb{R}$, definida en una vecindad abierta $\mathcal{N} \subset \Omega$ se denomina un p-invariante de Riemann local, $1 \leq p \leq n$, si

$$(8) \quad \dots \qquad Dw(u)^T r_p(u) = 0 \qquad \forall u \in \mathcal{N}$$

Observaciones:

(a) Un p-invariante de Riemann w es constante sobre una curva $v: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, si y sólo si

$$\frac{d}{d\xi}\big(w(v(\xi))\big) = Dw(v(\xi))^T v'(\xi) = 0$$

lo cual se cumple si v es una curva integral del campo $r_p(u)$, es decir, si $v'(\xi) = r_p(v(\xi))$.

(b) Si el p-campo es linealmente degenerado entonces $w(u) = \lambda_p(u)$ es un p-invariante de Riemann global.

Lema Sobre una p-onda de rarefacción, $1 \leq p \leq n$, todo p-invariante de Riemann es constante.

Dem. Directa de (a) y por ser toda curva de rarefacción una curva integral del campo r_p. $\square$

Definición Un sistema de leyes de conservación (1) está dotado de un sistema completo de invariantes de Riemann (globales) en Ω si existen n funciones escalares

$$w_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad 1 \leq j \leq n$$

tales que para todo par $1 \leq i, j \leq n$, con $i \neq j$, w_j es un i-invariante de Riemann global.

Corolario Las funciones $w_j : \Omega \to \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$ son un sistema completo de invariantes de Riemann si y sólo si

$$(9) \cdots \quad Dw_i(u)^T r_j(u) \begin{cases} = 0, & \text{si } i \neq j, \\ \neq 0, & \text{si } i = j, \end{cases}$$

es decir, ssi $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $Dw_i(u)$ es un vector propio izquierdo $l_i(u)$ de $A(u)$ con velocidad $\lambda_i(u)$.

Observaciones:

(a) Todo sistema de $n=2$ leyes de conservación tiene un sistema completo de invariantes de Riemann.

(b) Si $n \geq 3$ el sistema (a) está por lo general sobredeterminado. Cuando un sistema de $n \geq 3$ leyes de conservación tiene un sistema completo de invariantes de Riemann este se denomina rico o <u>semi-Hamiltoniano</u> (ejemplo: electroforesis).