Lección 3.3 : Normalizaciones. Ondas de rarefacción.

sistema de leyes de conservación

$$u_t + f(u)_x = 0 \qquad \cdots \quad (1)$$

$f \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, conexo.

$$A(u) = Df(u) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n})$$

Normalizaciones :

Lema 1 Sea $A \in C^m(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n})$, $m \geq 1$ y estrictamente hiperbólica. Entonces:

(a) Los valores propios $\lambda_j(u)$, $j = 1, \dots, n$, son de clase C^m como funciones de $u \in \Omega$.

(b) Es posible seleccionar los vectores propios $r_j = r_j(u) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $l_j = l_j(u) \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $1 \leq j \leq n$, de clase C^m y tales que

$$(2) \cdots \begin{cases} l_j(u) r_k(u) = 0 & \forall\, j \neq k, \ \forall u \in \Omega \\ |l_j(u)| = |r_j(u)| = 1, & \forall j, \quad " \end{cases}$$

Demostración : $A \in C^m(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n})$ estrictamente hiperbólica $\Rightarrow$ $\forall\, u_0 \in \Omega$

no estrictamente hiperbólico
$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n(u_0)$

$$\lambda_1(u_0) < \dots < \lambda_n(u_0)$$

$$\lambda_j(u_0) \in \mathbb{R}$$

$u_0 \in \Omega$ fijo.

Fijemos un índice $1 \leq p \leq n$. Tras normalizar el vector propio $r_p(u_0)$:

$$(3) \ldots \quad \begin{cases} A(u_0)\, r_p(u_0) = \lambda_p(u_0)\, r_p(u_0) \\ |r_p(u_0)| = 1 \end{cases}$$

Aplicamos el teorema de la función implícita al mapeo:

$$(4) \ldots \quad \begin{cases} G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^{n+1} \\ G \in C^1 \\ G(\underline{r, \lambda}, u) := \begin{pmatrix} A(u)r - \lambda r \\ |r|^2 - 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

El jacobiano de G con respecto a las variables (r, λ) es

$$\frac{\partial G}{\partial (r, \lambda)} = \begin{bmatrix} A(u) - \lambda I & -r \\ 2r^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$$

Definimos

$$B_0 := \left. \frac{\partial G}{\partial (r, \lambda)} \right|_{(r_p(u_0), \lambda_p(u_0), u_0)}$$

Claramente $G(r_p(u_0), \lambda_p(u_0), u_0) = 0$.

Por verificar $\det B_0 \neq 0$.

Para $0 < \varepsilon << 1$ suficientemente pequeño

$$A^{\varepsilon} := A(u_0) - (\underbrace{\lambda_p(u_0) + \varepsilon}) I$$

es invertible, por hiperbolicidad estricta.

(no estricto, cierto $\forall \lambda_k$, $1 \leq k \leq n$).

En vista de que

$$-\varepsilon^{-1} A^{\varepsilon} r_p(u_0) = -\varepsilon^{-1} \cancel{A(u_0)} r_p(u_0) + \\ + \varepsilon^{-1} \cancel{\lambda_p(u_0)} r_p(u_0) + r_p(u_0)$$

y $|r_p(u_0)| = 1$ podemos escribir

$$\begin{pmatrix} A^{\varepsilon} & -r_p(u_0) \\ 2r_p(u_0)^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\varepsilon^{-1} r_p(u_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A^{\varepsilon} & 0 \\ 2r_p(u_0)^T & -2\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} A^{\varepsilon} & -r_p(u_0) \\ 2r_p(u_0)^T & 0 \end{pmatrix} = -2\varepsilon^{-1} \det A^{\varepsilon}$$

$$= -2\varepsilon^{-1} \det \left[A(u_0) - (\lambda_p(u_0) + \varepsilon) I \right]$$

$$= 2 \prod_{j \neq p} \left(\lambda_j(u_0) - (\lambda_p(u_0) + \varepsilon) \right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 2 \prod_{j \neq p} \left(\lambda_j(u_0) - \lambda_p(u_0) \right) \neq 0$$

Concluimos que $\det B_0 \neq 0$.

Por el teorema de la función implícita existe una vecindad $N(u_0) \subset \Omega$ tal que es posible encontrar funciones

$$\lambda_p : N(u_0) \to \mathbb{R}$$

$$r_p : N(u_0) \to \mathbb{R}^{n \times 1} \quad \left(R_p : N(u_0) \to \mathbb{R}^{n \times \alpha} \right)$$

de clase C^m que satisfacen las conclusiones del teorema (a), (b).

Esto es válido $\forall \ 1 \leq p \leq n$, $\forall \ u_0 \in \Omega$ abierto, u_0 arbitrario. $l_j r_k = 0 \ \forall j \neq k$ se probó la clase pasada (hiperbolicidad estricta (si no hay hiperbolicidad estricta, $L_j R_k = 0 \ \forall j \neq k$)

$\alpha_j \times n \quad n \times \alpha_k$

La construcción para los vectores izquierdos es análoga.

$\square$

Lema 2 Sea $A \in C^m(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n})$, estrictamente hiperbólica. Si el p-campo característico, $1 \leq p \leq n$ es genuinamente nolineal entonces es posible seleccionar vectores propios $r_p = r_p(u) \in C^m(\Omega; \mathbb{R}^{n\times 1})$, $l_p = l_p(u) \in C^m(\Omega; \mathbb{R}^{1\times n})$ tales que

$$(5) \begin{cases} D\lambda_p(u)^T r_p(u) = 1 \\ l_p(u) r_p(u) = 1 \end{cases} \quad \forall u \in \Omega$$

Demostración: Ejercicio

$\square$

Ondas de rarefacción

Sean dos estados $u_L, u_R \in \Omega$, $u_L \neq u_R$

Objetivo: construir una solución autosimilar de (1) que conecte u_L con u_R.

Sea $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ fijo. Solución autosimilar dependerá de

$$\xi = \frac{x - x_0}{t - t_0}, \qquad t > t_0 > 0$$

Solución: $u(x,t) = v\left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\right) = v(\xi)$.

Pedimos $v = v(\xi) \in C^1$.

$u(x,t) = v(\xi)$ es solución clásica de (1) en su dominio

$$\Rightarrow \quad u_t + A(u)u_x = 0$$

Sustituyendo:

$$v'(\xi)\xi_t + A(v(\xi))v'(\xi)\xi_x = 0$$

$$\xi_t = -\frac{(x-x_0)}{(t-t_0)^2}, \qquad \xi_x = \frac{1}{t-t_0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(t-t_0)^{-1}}_{\neq 0}\left[-\xi v'(\xi) + A(v(\xi))v'(\xi)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(A(v(\xi)) - \xi I\right)v'(\xi) = 0 \quad \cdots (6)$$

(6) $\Rightarrow$ • $v'(\xi) = 0$

ó, • $\exists$ un índice $1 \leq p \leq n$ tal que

$$(7) \cdots \begin{cases} \lambda_p(v(\xi)) = \xi \\ v'(\xi) = \alpha(\xi)\, r_p(v(\xi)) \end{cases}$$

con $\alpha = \alpha(\xi) \in \mathbb{R}$, $\alpha(\xi) \neq 0$.

Supongamos que podemos resolver (7) en un intervalo $[\xi_1, \xi_2]$, $\xi_1 < \xi_2$.

Dado que los valores propios de A son distintos el índice p no depende de ξ y $v'(\xi) \neq 0$. Así, derivando la ecuación en (7):

$$1 = D\lambda_p(v(\xi))^T v'(\xi)$$

$$\underset{(4)}{=} \alpha(\xi) \, D\lambda_p(v(\xi))^T r_p(v(\xi))$$

Dado que el campo es genuinamente no lineal y usando la normalización del Lema 2 obtenemos

$$\alpha(\xi) \equiv 1$$

obtenemos el sistema

$$(8) \cdots \begin{cases} v'(\xi) = r_p(v(\xi)) \\ \xi = \lambda_p(v(\xi)) \end{cases}$$

((8) $\Rightarrow$ $v(\xi)$ es una curva integral del campo r_p)

Suponiendo que podemos resolver (8) en $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$, sujeto a las condiciones de frontera

$$(1)\ \cdots \begin{cases} \xi_1 = \lambda_p(u_L), & \xi_2 = \lambda_p(u_R) \\ v(\xi_1) = u_L, & v(\xi_2) = u_R \end{cases}$$

Aquí hemos supuesto que $\lambda_p(u_L) \leq \lambda_p(u_R)$.

En este caso la función continua autosimilar

$$(10)\ \cdots\ u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x-x_0 \leq \lambda_p(u_L)(t-t_0) \\ v\left(\dfrac{x-x_0}{t-t_0}\right), & \lambda_p(u_L)(t-t_0) \leq x-x_0 \leq \lambda_p(u_R)(t-t_0) \\ u_R, & \lambda_p(u_R)(t-t_0) \leq x-x_0 \end{cases}$$

es llamada una <u>p-onda de rarefacción</u> centrada en (x_0,t_0).

<u>Lema</u> La función es solución débil de (1).

Dem. Ejercicio $\square$