Lección 3.2 : Nolinealidad genuina y degeneración lineal.

Sistema de leyes de conservación:

$$u_t + f(u)_x = 0 \qquad \cdots (1)$$

$f \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω abierto, conexo.

$A(u) = D_u f(u) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n})$

Hiperbolicidad estricta: $\forall u \in \Omega$, los valores propios de $A(u)$ son reales y distintos

$$(2) \cdots \qquad \lambda_1(u) < \cdots < \lambda_n(u)$$

$\lambda_j \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$.

Bases completas de vectores propios:

"derechos" $\{r_j(u)\}_{j=1}^n$, $r_j(u) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, base de $\mathbb{R}^n$

$$A(u) r_j(u) = \lambda_j(u) r_j(u) \qquad \forall u \in \Omega, \ \forall\ 1 \le j \le n$$

"izquierdos" $\{l_j(u)\}_{j=1}^n$, $l_j(u) \in \mathbb{R}^{1\times n}$, base de $\mathbb{R}^n$

$$l_j(u) A(u) = \lambda_j(u) l_j(u), \qquad \forall u \in \Omega, \ \forall\ 1 \le j \le n$$

$r_j, l_j \in C^1(\Omega)$.

Hiperbolicidad estricta $\Rightarrow$ $l_j(u) r_k(u) = 0$ si $j \neq k$. $\forall u$.

Sea $1 \leq p \leq n$ un índice, campo característico principal : $r_p(u)$, $l_p(u)$.

Definición (nolinealidad genuina)

Decimos que el p-campo característico $1 \leq p \leq n$, es genuinamente nolineal si

$$(3) \cdots \qquad D\lambda_p(u)^T r_p(u) \neq 0 \qquad \forall\, u \in \Omega.$$

$$D\lambda_p(u) = \begin{pmatrix} \partial_{u_1} \lambda_p \\ \vdots \\ \partial_{u_n} \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

En este caso denominamos el p-campo como un "modo convexo".

El p-campo característico se denomina linealmente degenerado si

$$(4) \cdots \qquad D\lambda_p(u)^T r_p(u) = 0 \qquad \forall\, u \in \Omega.$$

Observación: En el caso escalar $(n=1)$ $\lambda(u) = a(u) = f'(u)$, única velocidad característica, $r(u) \equiv 1$. La condición (3) $\Leftrightarrow$ $f''(u) \neq 0$ $\forall\, u \in \Omega \subset \mathbb{R}$.

$\therefore$ f es estrictamente cóncava o
" convexa.

(4) $\Rightarrow$ $f''(u) \equiv 0$, $\forall\, u \in \Omega \subset \mathbb{R}$
$\therefore$ la ecuación escalar es <u>lineal</u>.
$a(u) = a_0$ constante.

Ejemplos :

(A) Sistema p :

$$(5) \cdots \begin{cases} v_t - u_x = 0 \\ u_t + p(v)_x = 0 \end{cases}$$

Hipótesis : • $p'(v) < 0$ $\forall\, v \in \Omega \subset \mathbb{R}$
• $p''(v) > 0$ "

$$U = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad F(U) = \begin{pmatrix} -u \\ p(v) \end{pmatrix}$$

$$A(U) = D_U F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(v) & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios :

$$\lambda_1(v) = -\sqrt{-p'(v)} < 0 < \lambda_2(v) = +\sqrt{-p'(v)}$$

Vectores propios asociados :

$$r_1(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-p'(v)} \end{pmatrix}, \quad r_2(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{-p'(v)} \end{pmatrix}$$

$$D_v\lambda_1 = \begin{pmatrix} \frac{p''(v)}{2\sqrt{-p'(v)}} \\ 0 \end{pmatrix} = -D_v\lambda_2$$

calculamos :

$$D\lambda_1^T r_1 = \frac{p''(v)}{2\sqrt{-p'(v)}} = -D\lambda_2^T r_2 \neq 0$$

$$\forall v \in \Omega$$

Los 1- y 2- campos del sistema p son genuinamente no lineales.

(B) Ecuaciones de Euler (coordenadas Eulerianas)

$$\left.\begin{aligned} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0 \\ u_t + uu_x + \frac{1}{\rho} p_x &= 0 \\ e_t + ue_x + \frac{1}{\rho} p u_x &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

forma cuasi-lineal,

ρ - densidad
u - velocidad
e - densidad de energía interna.

Ecuación de estado $\quad p = \hat{p}(\rho, e)$

Hipótesis :
- $\hat{p} > 0$
- $\hat{p}_\rho > 0$
- $\hat{p}_e > 0$

Entropía específica : s

1a ley de la termodinámica :

$$\theta \, ds = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

$$\Leftrightarrow \quad de = \frac{p}{\rho^2} d\rho + \theta \, ds$$

Energía interna $\quad e = \check{e}(\rho, s)$

$$\Rightarrow \quad p = \check{p}(\rho, s) := \hat{p}(\rho, \check{e}(\rho, s))$$

1a. ley : $\quad \check{e}_s = \theta , \quad \check{e}_\rho = \frac{p}{\rho^2}$

Entropía específica $\quad s = \hat{s}(\rho, e)$

$$\hat{s}_\rho = -\frac{p}{\rho^2 \theta}$$

$$\hat{s}_e = \frac{1}{\theta} .$$

Sustituyendo :

$$0 = e_t + u e_x + \frac{p}{\rho} u_x$$

$$= e_t + u e_x - \frac{p}{\rho^2}(\rho_t + u\rho_x)$$

(6)

$$= \left(e_t - \frac{p}{\rho^2}\rho_t\right) + u\left(e_x - \frac{p}{\rho^2}\rho_x\right)$$

$$= \theta\left(\hat{S}_e e_t + \hat{S}_\rho \rho_t\right) + \theta u\left(\hat{S}_e e_x + \hat{S}_\rho \rho_x\right)$$

$$= \theta S_t + \theta u S_x$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0 \\ u_t + u u_x + \frac{1}{\rho} p_x &= 0 \\ S_t + u S_x &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots (7)$$

El mapeo $\Psi : \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ s \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{pmatrix}$

es suave e invertible.

$$D\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \\ e + \frac{1}{\rho} p & \rho u & \rho\theta \end{pmatrix}$$

condiciones para la ecuación de estado $\hat{p} > 0$, $\hat{p}_\rho > 0$, $\hat{p}_e > 0$ son ahora :

- $\check{p} > 0$
- $\check{p}_\rho = \hat{p}_\rho + \hat{p}_e e_\rho$

$$= \hat{p}_\rho + \frac{\hat{p}}{\rho^2}\hat{p}_e =: c^2 > 0$$

velocidad del sonido

- $\check{p}_s = \hat{p}_e \check{e}_s = \theta \hat{p}_e > 0$

Hipótesis adicional:

$$\check{p}_{\rho\rho} > 0 \qquad \cdots \quad (8)$$

Ejemplo: Gas ideal

$$p = \hat{p}(\rho, e) = (\gamma - 1)\rho e$$

$\gamma > 1$

$$\Rightarrow \quad \check{p}(\rho, s) = (\gamma - 1)\rho\check{e}(\rho, s)$$

$$\check{p}_\rho = (\gamma - 1)\left(\check{e} + \frac{1}{\rho}\check{p}\right) > 0$$

$$\check{p}_s = \theta(\gamma - 1)\rho\check{e}_\rho > 0$$

$$\check{p}_{\rho\rho} = (\gamma - 1)\left(\check{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\check{p}_\rho - \frac{\check{p}}{\rho^2}\right)$$

$$= (\gamma - 1)\frac{\check{p}_\rho}{\rho} > 0.$$

Matriz jacobiana de (7):

$$A(\rho,u,S) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho}\check{P}_\rho & u & \frac{1}{\rho}\check{P}_S \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

Valores propios: $(c>0)$

$$\lambda_1 = u-c < \lambda_2 = u < \lambda_3 = u+c$$

Vectores propios:

$$r_1 = \begin{pmatrix} \rho \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} \check{P}_S \\ 0 \\ -c^2 \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} \rho \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad D\lambda_1 = \begin{pmatrix} -c_\rho \\ 1 \\ -c_S \end{pmatrix}, \quad D\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D\lambda_3 = \begin{pmatrix} c_\rho \\ 1 \\ c_S \end{pmatrix}$$

Así:

$$D\lambda_2^T r_2 \equiv 0$$

2-campo es linealmente degenerado.

El 1-campo y el 3-campo son convexos:

$$\nabla\lambda_1^T r_1 = -\left(\xi c_\xi + c\right)$$

$$= -\left(\xi \frac{\check{p}_{\xi\xi}}{2c} + c\right) < 0$$

$$\nabla\lambda_3^T r_3 = \xi \frac{\check{p}_{\xi\xi}}{2c} + c > 0.$$