Lección 3.10 : Solución local al problema de Riemann.

Sistema de leyes de conservación:

$$u_t + f(u)_x = 0 \qquad \cdots (1)$$

Problema de Riemann:

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L, & x<0 \\ u_R, & x>0 \end{cases} \qquad \cdots (2)$$

con $u_L \neq u_R$, $u_L, u_R \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Hipótesis:

$$0 < |u_R - u_L| =: \varepsilon_0 \ll 1$$

Suponemos que el p-campo característico $1 \leq p \leq n$, es simple, y genuinamente nolineal.

Si $u_L \in \Omega$ es el estado base, tenemos curvas

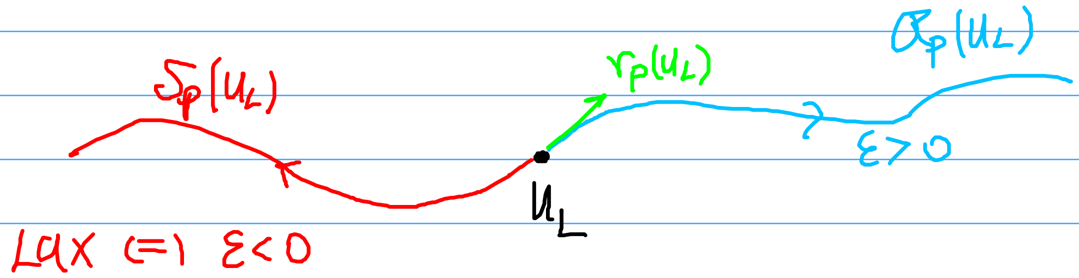
$$\mathcal{R}_p(u_L) = \{ \Phi_p(\varepsilon) : \ |\varepsilon| < \varepsilon_1 \}$$

$$\mathcal{S}_p(u_L) = \{ \Psi_p(\varepsilon) : \ |\varepsilon| < \varepsilon_2 \}$$

describen estados que se pueden conectar con u_L mediante rarefacción / onda de choque.

Definimos

$$(3) \ldots \quad T_p(\varepsilon; u_L) := \begin{cases} \Phi_p(\varepsilon), & \varepsilon > 0 \\ \Psi_p(\varepsilon), & \varepsilon \leq 0 \end{cases}$$



para cada $\quad 1 \leq p \leq n$.

Φ_p, Ψ_p - tienen la misma representación hasta orden $O(\varepsilon^2)$.

$\Rightarrow$ T_p es de clase C^2 en $|\varepsilon| \sim 0$ en la variable ε.

$\therefore \quad \{ T_p(\varepsilon; u_L) \; : \; |\varepsilon| \sim 0 \} \subset \Omega$

Nota: si el campo es linealmente degenerado se elige

$$T_p(\varepsilon; u_L) := \Psi_p(\varepsilon)$$

los estados se conectan con u_L mediante una discontinuidad de contacto.

($\exists$ local de la solución al problema de Riemann)

Teorema Supóngase que $\forall\ 1\leq p\leq n$, el p-campo característico es genuinamente no lineal o linealmente degenerado. Entonces $\forall\ u_L\in\Omega$ existe una vecindad $\mathcal{O}\subset\Omega$ de u_L con la siguiente propiedad: si $u_R\in\mathcal{O}$ entonces el problema de Riemann tiene una única solución débil que consta de, a lo más, $n+1$ estados constantes conectados entre sí por ondas de rarefacción, ondas de choque que satisfacen las condiciones de entropía de Lax, o discontinuidades de contacto.

Demostración Sea $u_L\in\Omega$, arbitrario. Definimos

$$\bar{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)^T\in\mathbb{R}^n$$

y consideramos el mapeo

$$(4)\ldots\quad\begin{cases} T:\mathcal{N}(0)\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\Omega \\ T(\bar{\varepsilon}):=T_n\big(\varepsilon_n;T_{n-1}(\varepsilon_{n-1};T_{n-2}(\varepsilon_{n-2};\ldots \\ \qquad\ldots T_1(\varepsilon_1;u_L)\cdots)))\end{cases}$$

definido para $\bar{\varepsilon}\in\mathcal{N}(0)$, $|\bar{\varepsilon}|\sim 0$. Queremos resolver la ecuación

$$T(\bar{\varepsilon})=u_R\qquad\text{con } u_R\in\mathcal{O}(u_L)$$

Observación:

- $T \in C^2(N(0))$ ya que $T_p \in C^2 \ \forall\, 1 \le p \le n$
- $T(0) = T_n(0; T_{n-1}(0; \dots, T_1(0; u_L) \cdots)))$

$= u_L$

Podemos expandir T en serie de Taylor:

$$T_p(\varepsilon_p; u) = u + \varepsilon_p r_p(u) + O(\varepsilon_p^2)$$

$$\forall\, 1 \le p \le n$$

en consecuencia:

$$T_2(\varepsilon_2; T_1(\varepsilon_1; u_L)) =$$

$$= T_1(\varepsilon_1; u_L) + \varepsilon_2 r_2(T_1(\varepsilon_1; u_L)) + O(\varepsilon_2^2)$$

$$= u_L + \varepsilon_1 r_1(u_L) + O(\varepsilon_1^2) +$$

$$+ \varepsilon_2 r_2(u_L + \varepsilon_1 r_1(u_L) + O(\varepsilon_1^2)) + O(\varepsilon_2^2)$$

$$= u_L + \varepsilon_1 r_1(u_L) + \varepsilon_2 r_2(u_L) + O(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)$$

Por inducción sobre p obtenemos

$$T(\varepsilon) = u_L + \sum_{p=1}^{n} \varepsilon_p r_p(u_L) + O(|\varepsilon|^2)$$

Así $DT(\bar{\varepsilon})\big|_{\bar{\varepsilon}=0}$ es

$$DT(0)\eta = \sum_{p=1}^{n} \eta_p r_p(u_L) \qquad \forall \eta \in \mathbb{R}^n$$

$$(\Rightarrow) \quad DT(0) = \begin{pmatrix} r_1(u_L) & \cdots & r_n(u_L) \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

matriz invertible

Por el teorema de la función inversa existe una vecindad $\mathcal{U} \subset \Omega$ de u_L tal que $\forall u_R \in \mathcal{U}$ el problema de Riemann tiene una única solución

$$\bar{\varepsilon}(u_R) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}(u_R) := T^{-1}(u_R)$$

De esta forma tenemos $n+1$ estados constantes:

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_L \\
u_1 &= T_1(\varepsilon_1(u_R);\, u_L) \\
u_2 &= T_2(\varepsilon_2(u_R);\, u_1) \\
&\ \vdots \\
u_p &= T_p(\varepsilon_p(u_R);\, u_{p-1}) \\
&\ \vdots \\
u_{n-1} &= T_{n-1}(\varepsilon_{n-1}(u_R);\, u_{n-2}) \\
u_n &= T_n(\varepsilon_n(u_R);\, u_{n-1}) \\
&= u_R
\end{aligned}$$

están separados por p- ondas (rarefacción, de choque o discontinuidades

de contacto) con intensidad $\varepsilon_p(u_R)$
(amplitud de la p-onda)

$\square$