Lección 3.1 : Sistemas de leyes de conservación en una dimensión. Sistemas lineales.

Sección 3 : Sistemas hiperbólicos de leyes de conservación en una dimensión

Sistemas de la forma:

$$u_t + f(u)_x = 0 \qquad \cdots (1)$$

donde $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω abierto y conexo, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $f \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

$(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad f = \begin{pmatrix} f_1(u) \\ \vdots \\ f_n(u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Jacobiano:

$$(2) \cdots \qquad A(u) := D_u f(u) = \begin{pmatrix} \partial_{u_1} f_1 & \cdots & \partial_{u_n} f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{u_1} f_n & \cdots & \partial_{u_n} f_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \forall u \in \Omega.$$

$A \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n})$

Hiperbolicidad: $A(u)$ es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ $\forall u \in \Omega$.

Problema de Cauchy: resolver (1) con condición inicial

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \cdots (3)$$

$u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})^n$.

Problema de Riemann: resolver (1) con condición inicial

$$u(x,0) = \begin{cases} u_L, & x<0 \\ u_R, & x>0 \end{cases} \quad \cdots (4)$$

con $u_L, u_R \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u_R \neq u_L$.

Sistemas lineales

Linealización alrededor de un estado constante

$$A(u+u_*) = A(u_*) + \underbrace{DA(u_*)u}_{\mathbb{R}^{n\times n}} + O(|u|^2)$$

Para $|u| \sim 0^+$, $A(u+u_*) \approx A(u_*)$

matriz constante

Sistema lineal

$$u_t + A u_x = 0 \quad \cdots (5)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $t>0$, $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ constante

Suponemos que A es estrictamente hiperbólica: A tiene exactamente n valores propios reales y distintos

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \qquad \ldots (6)$$

con $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $\forall\ 1 \leq j \leq n$.

Base completa de vectores propios derechos

$$r_j \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \qquad A r_j = \lambda_j r_j \qquad 1 \leq j \leq n$$

$\{r_j\}_{j=1}^{n}$ es base de $\mathbb{R}^n$.

Base completa de vectores propios izquierdos

$$l_j \in \mathbb{R}^{1\times n}, \qquad l_j A = \lambda_j l_j, \quad \forall\ 1 \leq j \leq n$$

$\{l_j\}_{j=1}^{n}$ base de $\mathbb{R}^n$.

Mas aún, es posible normalizar las bases de modo que

$$l_j r_k = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

$\Rightarrow$ definimos $R = \begin{pmatrix} r_1 & \cdots & r_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$L = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Por la normalización :

$$RL = LR = I \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Además,

$$LAR = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} r_1 & \cdots & r_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =: \Lambda \quad \text{diagonal}$$

Definimos $v = Lu$. Multiplicando (5) por L por la izquierda :

$$0 = Lu_t + LAu_x \underset{Rv = u}{=} v_t + LARv_x$$

$$= v_t + \Lambda v_x$$

Sistema desacoplado de n ecuaciones :

$$\partial_t v_j + \lambda_j \partial_x v_j = 0 \quad \cdots (6)$$

$\forall\ 1 \leq j \leq n.$

v_j es constante sobre rectas característi-cas

$$\hat{x}_j(t) = \lambda_j t + x_j^0 , \quad j = 1, \dots, n.$$

La solución de (6) es:

$$v_j(x,t) = v_j(x-\lambda_j t, 0)$$

$v_j(\cdot,0)$ está determinada por $u(x,0)$:

$$v(x,0) = L\,u(x,0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Problema de Cauchy:

$$\left.\begin{aligned} u_t + A u_x &= 0, \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

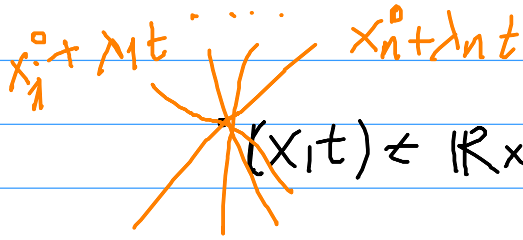
denotando $v_0(x) = L\,u_0(x)$, (7) tiene como solución

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= R\,v(x,t) \\
&= \begin{pmatrix} r_1 & \cdots & r_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_1 r_1 & \cdots & v_n r_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{n} v_j(x,t)\, r_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{v_j(x-\lambda_j t, 0)}_{1\times 1}\, r_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \underset{1\times n}{l_j}\, \underset{n\times 1}{u_0(x-\lambda_j t)}\, \underset{n\times 1}{r_j} \qquad \cdots (8)
\end{aligned}$$

Si $u_0 \in C^k(\mathbb{R})$ entonces $u \in C^k[\mathbb{R} \times (0,\infty)]$

La curva $\hat{x}_j(t)$ es la recta (curva) j-característica del sistema.

Hiperbolicidad estricta $\Rightarrow$ $\forall$ (x,t) fijo pasan exactamente n características.



$(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$

Problema de Riemann:

$$u_0(x) = \begin{cases} u_L, & x<0 \\ u_R, & x>0 \end{cases}$$

$u_L \neq u_R \in \mathbb{R}^n$ constantes.

$$\therefore \quad u_L = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j r_j$$

$$u_R = \sum_{j=1}^{n} \beta_j r_j$$

α_j, β_j constantes.

En las variables $v = Lu$,

$$(v_0)_j(x) = \begin{cases} \alpha_j, & x<0 \\ \beta_j, & x>0 \end{cases}$$

$$\forall \quad 1 \leq j \leq n$$

La solución $v_j(x,t)$ es :

$$v_j(x,t) = v_j(x-\lambda_j t, 0)$$

$$= \begin{cases} \alpha_j, & x<\lambda_j t \\ \beta_j, & x>\lambda_j t \end{cases} \qquad \forall j$$

Sustituyendo en (8) :

$$u(x,t) = Rv = \sum_{j=1}^{n} v_j(x,t)\, r_j .$$

Definimos

$$w_j\left(\frac{x}{t}\right) := v_j(x,t) = \begin{cases} \alpha_j, & \frac{x}{t}<\lambda_j \\ \beta_j, & \frac{x}{t}>\lambda_j \end{cases}$$

$$\forall j, \quad \forall t>0.$$

Para cada $(x,t) \in \mathbb{R}\times(0,\infty)$ con $t>0$ existe un único $1 \leq p \leq n$ tal que

$$\lambda_1 < \cdots < \lambda_p \leq \frac{x}{t} \leq \lambda_{p+1} < \cdots < \lambda_n$$

si $p=n$, $\lambda_{p+1} = \infty$.

$\therefore$ en el intervalo $\lambda_p t < x < \lambda_{p+1} t$
la solución toma un valor constante

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{p} \beta_j r_j + \sum_{j=p+1}^{n} \alpha_j r_j$$

$$=: w_p$$

$$\forall \quad 0 \leq p \leq n$$

asumiendo la convención

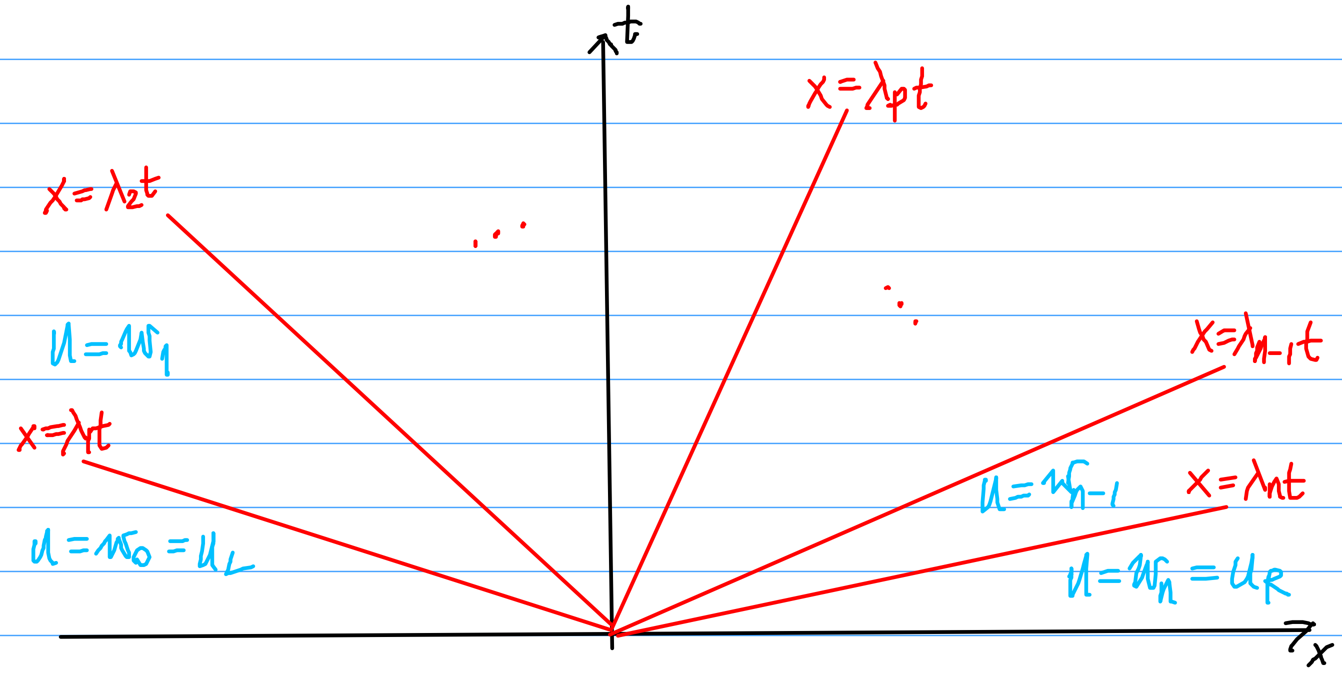
$$-\infty = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1} = \infty$$

con $\quad w_0 := u_L \quad , \quad w_n := u_R$

Así,

$$(9) \cdots \quad u(x,t) = \begin{cases} w_0 = u_L, & x < \lambda_1 t \\ w_1 = \beta_1 r_1 + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j r_j, & \lambda_1 t < x < \lambda_2 t \\ \vdots & \\ w_p = \sum_{1}^{p} \beta_j r_j + \sum_{p+1}^{n} \alpha_j r_j & \lambda_p t < x < \lambda_{p+1} t \\ \vdots & \\ w_n = u_R, & \lambda_n t < x \end{cases}$$

solución al problema de Riemann
(caso lineal).



Salto, $[\![w]\!] = w_p - w_{p-1}$

$$= (\beta_p - \alpha_p)\, r_p$$

$$[\![f]\!] = A\,[\![w]\!] = \lambda_p\,(w_p - w_{p-1})$$

lineal

$$= \lambda_p\,(\beta_p - \alpha_p)\, r_p$$

$\Rightarrow$ se cumplen las condiciones de Rankine-Hugoniot.

$f(u) = Au, \quad s = \lambda_p$