Lección 2.9 : Fórmula de Lax-Hopf: existencia (continuación). Unicidad.

Problema de Cauchy:

$$\left.\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f''(u) \geq \delta > 0$, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$
$a(u) := f'(u) \to \pm\infty$ si $u \to \pm\infty$.

- $\hat{y} = \hat{y}(x,t)$ único mínimo de

$$\min_{y \in \mathbb{R}} G(x,t,y)$$

$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ c.d.s., con

$$G(x,t,y) = \int_0^y u_0(\xi)\, d\xi + t f^*\left(\frac{x-y}{t}\right)$$

- Lax-Hopf:

$$u(x,t) := g\left(\frac{x - \hat{y}(x,t)}{t}\right) \quad \ldots (2)$$

donde $g(u) := a^{-1}(u)$.

- Aproximación de (1): sucesiones $u_n(x,t)$, $f_n(x,t)$, $v_n(x,t)$ c.d.s. tales que

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &\to u(x,t) && \text{c.d.s.} \\ f_n(x,t) &\to f(u(x,t)) && \text{si } n \to \infty \end{aligned}$$

y además

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (\phi_t u_n + \phi_x f_n)\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x,0)\, u_n(x,0)\, dx = 0 \quad \cdots (***)$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

¿Cuál es el valor de $u_n(x,0)$?

$= u_0(x) \quad \underline{\forall n \in \mathbb{N}}$

Recordamos que $\quad G_x = g\left(\frac{x-y}{t}\right)$

$$\Rightarrow G_x(x,t,\hat{y}(x,t)) = g\left(\frac{x-\hat{y}(x,t)}{t}\right) = u(x,t)$$

Sabemos que

$$G(x,t,\hat{y}(x,t)) \leq G(x,t,x) = \int_0^x u_0(\xi)\, d\xi + t f^*(0)$$

$$\Rightarrow \quad G(x,t,\hat{y}(x,t)) - \int_0^x u_0(\xi)\, d\xi \leq Ct \quad \cdots (3)$$

Por definición de $\hat{y}(x,t)$:

$$G(x,t,\hat{y}(x,t)) = \int_0^x u_0(\xi)\, d\xi + \min_{y\in\mathbb{R}} \left[\int_x^y u_0(\xi)\, d\xi + t f^*\left(\frac{x-y}{t}\right)\right]$$

$u_0 \in L^\infty$

$$\geq \int_0^x u_0(\xi)\,d\xi + \min_{y\in\mathbb{R}}\left(-C|x-y| + t f^*\left(\frac{x-y}{t}\right)\right)$$

$z = \frac{x-y}{t}$

$$= \int_0^x u_0(\xi)\,d\xi + t \min_{z\in\mathbb{R}}\left(-C|z| + f^*(z)\right)$$

$$= \int_0^x u_0(\xi)\,d\xi - t \max_{z\in\mathbb{R}}\left(C|z| - f^*(z)\right)$$

Sabemos que $(f^*)^* = f$:

$$\max_{z\in\mathbb{R}}\left(C|z| - f^*(z)\right) \leq \max_{v\in(0,C)} \max_{z\in\mathbb{R}} \left(vz - f^*(z)\right)$$
$$= \max_{v\in(0,C)} (f^*)^*(v)$$
$$= \max_{v\in(0,C)} f(v) =: C_0$$

con $C_0 > 0$. Así,

(4) ... $G(x,t,\hat{y}(x,t)) - \int_0^x u_0(\xi)\,d\xi \geq -C_0 t$

(3), (4) $\Rightarrow$

(5).- $\left| G(x,t,\hat{y}(x,t)) - \int_0^x u_0(\xi)\,d\xi \right| \leq \bar{C} t$

para cierta $\bar{C} > 0$. Tomando lím cuando $t \to 0^+$:

$$\lim_{t\to 0^+} G(x,t,\hat{y}(x,t)) = \int_0^x u_0(\xi)\, d\xi$$

$$\overset{\|}{\because} \quad G(x,0,\hat{y}(x,0)) \quad \text{c.d.s. en } x\in\mathbb{R}$$

$$\therefore \quad G_x(x,0,\hat{y}(x,0)) = u_0(x) \quad \text{c.d.s. en } x\in\mathbb{R}$$

De este modo $u_n(x,0) = u_0(x)$ c.d.s. en $x\in\mathbb{R}$ y $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

De (***):

$$0 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\phi_t u_n + \phi_x f_n\right) dx\, dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x,0)\, u_0(x)\, dx$$

$\forall n\in\mathbb{N}$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\phi_t u + \phi_x f(u)\right) dx\, dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x,0)\, u_0(x)\, dx = 0$$

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$$

$\therefore$ $u = u(x,t)$ es solución debil de (1).

También es entrópica: el mapeo $x \mapsto \hat{y}(x,t)$ es no decreciente; así, $\forall\, x_1 \le x_2$, $\forall\, t>0$

$a(u(x_2,t)) - a(u(x_1,t))$

$$= a\left(g\left(\frac{x_2 - \hat{y}(x_2,t)}{t}\right)\right) - a\left(g\left(\frac{x_1 - \hat{y}(x_1,t)}{t}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{t}\left(x_2 - \hat{y}(x_2,t)\right) - \frac{1}{t}\left(x_1 - \hat{y}(x_1,t)\right)$$

$$\leq \frac{x_2 - x_1}{t}$$

Esta desigualdad $\Rightarrow$ deinik

<u>Unicidad</u>

Sean $u_1, u_2 \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ dos soluciones entrópicas de (1). Definimos

$$w := u_2 - u_1 .$$

Entonces w satisface la ecuación lineal

$$w_t + (bw)_x = 0 \qquad \cdots \quad (6)$$

donde $b = b(x,t)$ se define como

$$bw := f(u_2) - f(u_1)$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{d\theta} f(\theta u_2 + (1-\theta)u_1)\, d\theta$$

$$= (u_2 - u_1) \int_0^1 a(\theta u_2 + (1-\theta)u_1)\, d\theta$$

(6) se satisface en sentido débil:
sea $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ función de prueba

$$(7) \cdots \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(w\phi_t + bw\,\phi_x \right) dx\, dt = 0$$

ya que $w(x,0) = u_1(x,0) - u_2(x,0) = 0$ c.d.s.

Ahora, $\forall \epsilon > 0$ definimos los alisamientos

$$u_2^\epsilon := \eta_\epsilon * u_2$$

$$u_1^\epsilon := \eta_\epsilon * u_1$$

η_ϵ es el alisador de Friedrichs en las variables (x,t).

Por propiedades del alisador:

- $\|u_1^\epsilon\|_{L^\infty} \leq \|u_1\|_{L^\infty}$

  $\|u_2^\epsilon\|_{L^\infty} \leq \|u_2\|_{L^\infty}$

- $u_1^\epsilon \to u_1$, $u_2^\epsilon \to u_2$ c.d.s. en $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ si $\epsilon \to 0^+$.

Sabemos que u_1, u_2 son soluciones entrópicas: por la condición de Oleinik, tenemos $\forall\, u$ entrópica

$$(x_2-x_1)^{-1}\left(u^\epsilon(x_2,t)-u^\epsilon(x_1,t)\right)$$

$$= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \eta_\epsilon(y,t)\,(x_2-x_1)^{-1}\left[u(x_2-y,t)-u(x_1-y,t)\right] dy$$

$$\leq \frac{C}{t}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\eta_\epsilon = \frac{C}{t}$$

$u_1^\epsilon, u_2^\epsilon$ también satisfacen oleinik.
como $u_j^\epsilon \in C^\infty$,

$$\partial_x u_1^\epsilon,\ \partial_x u_2^\epsilon \leq \frac{C}{t}$$

Definimos :

$$b^\epsilon(x,t) := \int_0^1 a\left(\theta u_2^\epsilon + (1-\theta)u_1^\epsilon\right) d\theta$$

Por lo tanto (7) se escribe :

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}} \left(\phi_t w + \phi_x b^\epsilon w\right) dx\, dt \quad +$$

$$+ \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}} (b-b^\epsilon)\, w\, \phi_x \, dx\, dt = 0$$

$$\cdots (7')$$

Sea $T>0$ fijo, sea $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times[0,T];\mathbb{R})$ y consideramos el problema de valores finales :

$$(8)\ldots\begin{cases} v^\epsilon_t + b^\epsilon v^\epsilon_x = \Phi, & x\in\mathbb{R},\ 0<t<T \\ v^\epsilon(x,T) = 0, & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

(8) es un problema lineal, se resuelve con el método de características:

Sea $\hat{x} = \hat{x}(s;x,t)$ solución de

$$(9)\ldots\begin{cases} \dfrac{d\hat{x}}{ds} = b^\epsilon(\hat{x},s) & s\geq t \\ \hat{x}(t) = x \end{cases}$$

de modo que

$$\frac{d}{ds}\left(v^\epsilon(\hat{x}(s),s)\right) = v^\epsilon_s + b^\epsilon v^\epsilon_x$$
$$= \Phi(\hat{x}(s),s)$$

Integrando:

$$(10)\ldots v^\epsilon(x,t) = -\int_t^T \Phi(\hat{x}(s;x,t),s)\,ds$$

La solución $v^\epsilon = v^\epsilon(x,t)$ de (8) es única y suave, es acotada, y como Φ tiene soporte compacto, v^ϵ tiene soporte compacto en $\mathbb{R}\times[0,T)$.

Sea $0 < \tilde{s} \leq t \leq T$, entonces

$$
\begin{aligned}
b_x^\epsilon(x,t) &= \partial_x \int_0^1 a(\theta u_2^\epsilon + (1-\theta) u_1^\epsilon)\, d\theta \\
&= \int_0^1 f''(\theta u_2^\epsilon + (1-\theta)u_1^\epsilon)\left[\theta\, \partial_x u_2^\epsilon + \right. \\
&\qquad \left. + (1-\theta)\,\partial_x u_1^\epsilon\right] d\theta \\
&\leq \frac{c}{t} \int_0^1 f''(\theta u_2^\epsilon + (1-\theta)u_1^\epsilon)\, d\theta \\
&\leq \frac{\tilde{C}}{t} \\
&\leq \frac{\tilde{C}}{s} \qquad \cdots (11).
\end{aligned}
$$

ya que $f'' \in C$, f convexa, int. compacto.