Lección 2.8 : Fórmula de Lax-Hopf: existencia (continuación).

Problema de Cauchy :

$$(1) \cdots \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f''(u) \geq \delta > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}$
$a(u) = f'(u) \in C^1(\mathbb{R})$, $a(u) \to \pm\infty$ si $u \to \pm\infty$.
$u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Se definen:

$$G(x,t,y) := U_0(y) + t f^*\left(\frac{x-y}{t}\right) \quad \cdots \quad (2)$$

donde

$$U_0(y) := \int_0^y u_0(\xi)\, d\xi \quad \cdots \quad (3)$$

$\exists \ y = y(x,t)$ tal que $\min\limits_{y \in \mathbb{R}} G(x,t,y) = G(x,t,y(x,t))$

$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ fijo.

$\in \mathbb{R}$

Lema 1 Para $x_1, x_2, t > 0$ dados, sean y_1, y_2 dos valores que minimizan $G(x_1, t, y)$ y $G(x_2, t, y)$, respectivamente. Si $x_2 > x_1$ entonces $y_2 \geq y_1$.

Dem. clase pasada $\square$

Corolario 1 El mapeo $x \mapsto y(x,t)$, donde $y = y(x,t)$ es cualquier mínimo de $G(x, t, y(x,t))$, es no decreciente.

Proposición 1 Si para $t > 0$ fijo, $y = y(x,t)$ es una función no decreciente de x entonces $y(x,t)$ es continua en x excepto en un conjunto numerable de puntos.

Demostración: ver Bartle, Sherbert, "Intro. to real analysis", theorem 5.6.4, p. 151. $\square$

Afirmación: en un punto de continuidad de $y(\cdot, t)$, $t > 0$ fijo, éste es el único valor de y que minimiza a G.

Demostración: para cada $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, fijo, sean $y_-(x,t)$, $y_+(x,t)$ los valores más pequeño y más grande de y que minimizan $G(x, t, y)$.

Así, $\quad y_-(x,t) \leq y(x,t) \leq y_+(x,t)$

Si $x_2 > x_1$, por el lema 1 tenemos que:

$$\begin{cases} y(x_1,t) \leq y_-(x_2,t) \\ y_+(x_1,t) \leq y(x_2,t) \end{cases}$$

Si $x_0 \in \mathbb{R}$ es un punto de continuidad de $y(x,t)$, tomamos $\begin{matrix} x_2 = x_0 + \varepsilon \\ x_1 = x_0 - \varepsilon \end{matrix}$

con $0 < \varepsilon \ll 1$. Así,

$$\begin{aligned} y_-(x_0,t) - y_+(x_0,t) &= \overbrace{y_-(x_0,t) - y(x_0-\varepsilon,t)} + \\ &\quad + y(x_0-\varepsilon,t) - y(x_0+\varepsilon,t) + \\ &\quad + \underbrace{y(x_0+\varepsilon,t) - y_+(x_0,t)} \\ &\geq -\left| y(x_0+\varepsilon,t) - y(x_0-\varepsilon,t) \right| \end{aligned}$$

$\downarrow$ 0 si $\varepsilon \to 0^+$

por ser punto de continuidad

$\therefore \quad y_-(x_0,t) \geq y_+(x_0,t) \qquad \forall x_0$ pto. de continuidad

Por la Proposición 1, concluimos que

$$y_-(x,t) = y_+(x,t) \qquad \forall (x,t) \text{ c.d.s. en } \mathbb{R} \times (0,\infty)$$

$\therefore \quad y = y(x,t)$ es único valor que minimiza $G(x,t,y)$, c.d.s. en $(x,t) \in \mathbb{R}\times(0,\infty)$.

Notación: $\quad y = \hat{y}(x,t), \quad (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)$ c.d.s.

Definimos:

$$u(x,t) := g\left(\frac{x-\hat{y}(x,t)}{t}\right) \quad \cdots (4)$$

$\forall\ (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)$, c.d.s., $\quad g = a^{-1}$.

$\forall n\in\mathbb{N}$ definimos las aproximaciones

$$u_n(x,t) := \frac{\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x-y}{t}\right) e^{-nG(x,t,y)}\, dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x,t,y)}\, dy} \quad \cdots (5)$$

$$f_n(x,t) := \frac{\int_{\mathbb{R}} f\left(g\left(\frac{x-y}{t}\right)\right) e^{-nG(x,t,y)}\, dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x,t,y)}} \quad \cdots (6)$$

$$v_n(x,t) := \log \int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x,t,y)}\, dy \quad \cdots (7)$$

$\forall\ (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)$, c.d.s., $\quad \forall n\in\mathbb{N}$.

Lema 2 El mapeo $y \mapsto G(x,t,y)$ es Lipschitz, $\forall\ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ c.d.s.

Demostración: $f, g \in C^1$, $u_0 \in L^\infty$; por lo tanto:

$$|G(x,t,y_1) - G(x,t,y_2)| \leq \left| \int_{y_2}^{y_1} u_0(\xi)\, d\xi \right| + \left| t f^*\left(\frac{x-y_1}{t}\right) - t f^*\left(\frac{x-y_2}{t}\right) \right|$$

$$= \left| \int_{y_2}^{y_1} u_0(\xi)\, d\xi \right| + \left| t \left[\left(\frac{x-y_1}{t}\right) g\left(\frac{x-y_1}{t}\right) - f\left(g\left(\frac{x-y_1}{t}\right)\right) - \left(\frac{x-y_2}{t}\right) g\left(\frac{x-y_2}{t}\right) + f\left(g\left(\frac{x-y_2}{t}\right)\right) \right] \right|$$

$$\leq C|y_2 - y_1| + \tilde{C}(x,t)|y_2 - y_1|$$

$$\Rightarrow |G(x,t,y_1) - G(x,t,y_2)| \leq C(x,t)|y_2 - y_1|$$

$\square$

Hemos observado que

$$G(x,t,y) \to \infty \quad \text{si } |y| \to \infty$$

con $\hat{y}(x,t)$ único mínimo de $G(x,t,y)$ $\forall\ (x,t)$ fijo.

Por lo tanto, $\forall\, \delta>0$ tenemos que en

$$|y-\hat{y}(x,t)| \geq \delta, \qquad G(x,t,y) \neq 0.$$

$\therefore \ \exists \ \bar{C} = \bar{C}(x,t,\delta) > 0$ tal que

$$G(x,t,y) \geq \bar{C}\,|y-\hat{y}(x,t)| \geq \bar{C}\delta. \quad (*)$$

Así,

$$e^{-nG(x,t,y)} \leq e^{-n\bar{C}|y-\hat{y}(x,t)|} \quad \text{para } |y-\hat{y}(x,t)| \geq \delta.$$

De este modo,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x,t,y)}\,dy = \int_{|y-\hat{y}(x,t)|\geq\delta} e^{-nG(x,t,y)}\,dy + \int_{|y-\hat{y}(x,t)|\leq\delta} e^{-nG(x,t,y)}\,dy$$

$$\leq C(n,x,t,\delta) + \int_{\mathbb{R}} e^{-n\bar{C}|y-\hat{y}(x,t)|}\,dy$$

$$< \infty$$

Como $f,g \in C^1$, las integrales (5)-(7) están bien definidas.

Por la definición de $G(x,t,y)$, y dado que $\frac{df^*}{dv} = g(v)$, notamos que

$$G_t(x,t,y) = f^*\left(\frac{x-y}{t}\right) - \left(\frac{x-y}{t}\right) g\left(\frac{x-y}{t}\right)$$
$$= -f\left(g\left(\frac{x-y}{t}\right)\right)$$

$$G_x(x,t,y) = g\left(\frac{x-y}{t}\right)$$

Es posible verificar la convergencia uniforme de las integrales en (5)-(7). Derivando:

$$\partial_x v_n = \frac{-n \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x-y}{t}\right) e^{-nG(x,t,y)}\, dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x,t,y)}\, dy}$$

$$\partial_t v_n = \frac{n \int_{\mathbb{R}} f\left(g\left(\frac{x-y}{t}\right)\right) e^{-nG(x,t,y)}\, dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x,t,y)}\, dy}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \partial_x v_n = n u_n \\ \partial_t v_n = n f_n \end{array}\right\} \cdots \quad (8)$$

Dado que $\partial_t(\partial_x v_n) = \partial_x(\partial_t v_n)$ obtenemos $\partial_t(-n u_n) = \partial_x(n f_n)$, es decir,

$$\partial_t u_n + \partial_x f_n = 0 \quad \cdots (9).$$

W.log., el mínimo de $G(x,t,y)$ es 0,

$$G(x,t,\hat{y}(x,t)) = 0 \quad \cdots (10)$$

Esta normalización no afecta la definición de u, ni $\hat{y}(x,t)$, ni u_n, f_n, salvo la de v_n por una constante.

G Lipschitz en $y \Rightarrow \exists\ C_1 = C_1(x,t,\delta) > 0$ tal que

$$|G(x,t,y)| \leq C_1 |y - \hat{y}(x,t)|$$

$$\forall\ |y - \hat{y}(x,t)| < \delta.$$

Esto implica que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x,t,y)}\,dy \geq \int_{\hat{y}(x,t)-\delta}^{\hat{y}(x,t)+\delta} e^{-nG(x,t,y)}\,dy$$

$$\geq \int_{|y-\hat{y}(x,t)|\leq\delta} e^{-nC_1|y-\hat{y}(x,t)|}\,dy \qquad (**)$$

$$= 2\int_0^{\delta} e^{-nC_1\xi}\,d\xi = \frac{2}{nC_1}\left(1 - e^{-nC_1\delta}\right) \geq \frac{C_2}{n}$$

$\forall\ n > \frac{1}{\delta}$ y con $C_2 > 0$ independiente de n.

$g \in C^1$, $\Rightarrow$ sea $\tilde{C}(t) > 0$ la constante de Lipschitz de $g\left(\frac{\cdot}{t}\right)$ $\forall\ t > 0$.

Por $(*)$ para $|y - \hat{y}(x,t)| \geq \delta$

$(**)$ para $|y - \hat{y}(x,t)| > \delta$

obtenemos:

$$|u_n(x,t) - u(x,t)| = \left| \frac{\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x-y}{t}\right) e^{-nG} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nG} dy} - g\left(\frac{x - \hat{y}(x,t)}{t}\right) \right|$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-nG} dy \right)^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| g\left(\frac{x-y}{t}\right) - g\left(\frac{x-\hat{y}}{t}\right) \right| e^{-nG} dy \right)$$

$$\leq \bar{C}(t) \frac{\int_{\mathbb{R}} |y - \hat{y}(x,t)| e^{-nG} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nG} dy}$$

$$\leq \bar{C}(t)\delta + \frac{n\bar{C}(t)}{C_2} \int_{|y-\hat{y}| \geq \delta} |y - \hat{y}| e^{-n\bar{c}|y-\hat{y}|} dy$$

$$\leq \bar{C}(t)\delta + 2n\hat{C}(t) \int_0^\infty \xi e^{-\bar{c}n\xi} d\xi$$

$$= \bar{C}(t)\delta + \frac{C_3(t)}{n}$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} |u(x,t) - u_n(x,t)| \leq \bar{c}(t)\,\delta$$

con $\delta > 0$ arbitrario.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} u_n(x,t) = u(x,t)$$
$\forall (x,t)$ c.d.s.

Análogamente

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,t) = f(u(x,t))$$

Multiplicando (9) por $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \phi_t u_n + \phi_x f_n \, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x,0)\, u_n(x,0)\, dx = 0.$$

(***)