Lección 2.7 : Fórmula de Lax-Hopf (continuación).

$u$ solución de clase $C^1$ por pedazos, con soporte compacto en $\mathbb{R}\times(0,\infty)$, de

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 \qquad \cdots \qquad (1)\\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

$f\in C^2$, $f''\geq \delta>0$, $\quad a(u) = f'(u)$.

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{x} u(\xi,t)\, d\xi$$

$$U_0(x) = U(x,0)$$

Para $(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)$, $v\in\mathbb{R}$ fijos,

$\Gamma_{(x,t)}$ = característica que pasa por $(x,t)$ con pendiente $a(v)$

$$\Rightarrow \quad U(x,t) \leq U(y,0) + t\big(v a(v) - f(v)\big) \cdots (2)$$

donde $y = x - a(v)t$.

Dado que $\dfrac{x-y}{t} = a(v)$, $\quad g = a^{-1}$, entonces

$$v = g\left(\frac{x-y}{t}\right)$$

Sustituyendo,

$$U(x,t) \le U(y,0) + t\left[\left(\frac{x-y}{t}\right) g\left(\frac{x-y}{t}\right) - f\left(g\left(\frac{x-y}{t}\right)\right)\right]$$

$$= U(y,0) + t f^*\left(\frac{x-y}{t}\right) \qquad \cdots \quad (3)$$

(3) se cumple $\forall\, v \in \mathbb{R}$, $\forall\, (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$

$\Rightarrow$ es cierta $\forall\, y \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \quad U(x,t) \le \overbrace{U_0(y) + t f^*\left(\frac{x-y}{t}\right)} \qquad \cdots \quad (4)$$

$\forall (x,t), \forall y$.

En particular, (4) se cumple para $\hat{y} = \hat{y}(x,t)$ tal que

$$g\left(\frac{x - \hat{y}(x,t)}{t}\right) = u(x,t). \qquad \cdots \quad (5)$$

Este valor existe ya que $g = a^{-1}$ y $a$ es sobre. Nótese que

$$(5) \iff a(u(x,t))\, t = x - \hat{y}(x,t) \quad \leftarrow$$

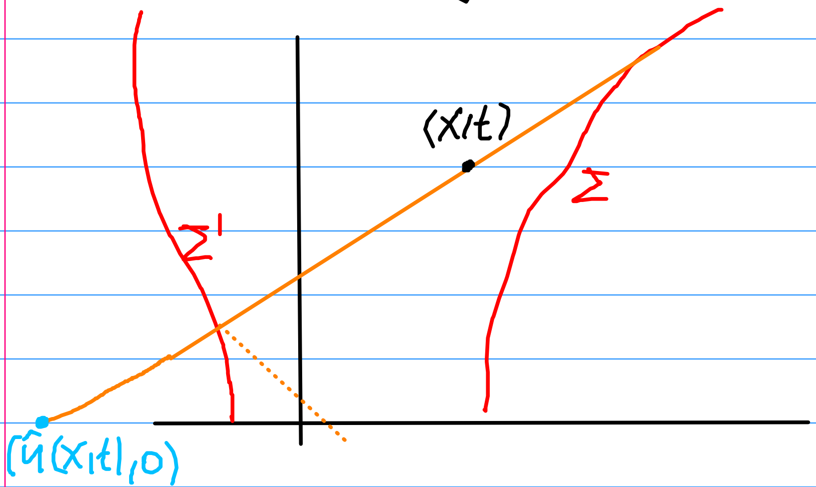
Afirmación: este valor único de $\hat{y}(x,t)$ minimiza el lado derecho de (4).

Para $(x,t)$ dado, fuera de una discontinuidad $\Sigma$ de $u$, sea la característica

$$(\xi(\sigma), \sigma) \in \mathbb{R}^2, \qquad \xi(\sigma) = a(u(x,t))(\sigma - t) + x$$

$\sigma \in (0,t)$.

Intersecta al eje $t=0$ en $\xi(0) = \hat{y}(x,t)$.




No intersecta a otra discontinuidad $\Sigma'$ para un tiempo $\tilde{t} < t$, dado que se cumple Lax (por hipótesis)

$u$ es constante sobre esta característica.
Dado que $U_x = u$, tenemos

$$\begin{cases} U_t(\xi(\sigma),\sigma) = -f(u(\xi(\sigma),\sigma)) \\ u(x,t) = u(\xi(\sigma),\sigma) \end{cases} \quad \forall \sigma \in (0,t)$$

Por lo tanto:

$$U_t(\xi(\sigma),\sigma) + a(u(\xi(\sigma),\sigma))\, U_x(\xi(\sigma),\sigma) =$$

$$= a(u(x,t))\,u(x,t) - f(u(x,t))$$

$$\forall \sigma \in (0,t).$$

Integrando en $\sigma \in (0,t)$:

$$U(x,t) - U(\hat{y}(x,t),0) = \int_0^t \frac{d}{d\sigma}\left(U(\xi(\sigma),\sigma)\right) d\sigma$$

$$= \int_0^t \underbrace{\left[U_t(\xi(\sigma),\sigma) + a(u(\xi(\sigma),\sigma))\,U_x(\xi(\sigma),\sigma)\right]} d\sigma$$

$$= \int_0^t \left[ a(u(x,t))\,u(x,t) - f(u(x,t)) \right] d\sigma$$

$$= t\left[ a(u(x,t))\,u(x,t) - f(u(x,t)) \right]$$

$$= t\, f^*\left( \frac{x - \hat{y}(x,t)}{t} \right)$$

Es decir, (4) se cumple en forma de igualdad para $y = \hat{y}(x,t)$.

$\therefore$ el mínimo ocurre en $y = \hat{y}(x,t)$ y tenemos la representación (5) (fórmula de Lax-Hopf) para $u$ de clase $C^1$ por pedazos, entrópica y de soporte compacto.

## Fórmula de Lax-Hopf : existencia

Por hipótesis : $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Podemos definir :

$$U_0(y) := \int_0^y u_0(x)\, dx \qquad \cdots \qquad (1)$$

Nuevamente w.l.o.g. $f(0) = 0$ ( $f(u) \to f(u) - f(0)$. ) Dado que

- $f''(u) \geq \delta > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{u \to \pm\infty} f'(u) = \pm\infty$

podemos definir $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$, y $\forall\, y \in \mathbb{R}$ :

$$G(x,t,y) := U_0(y) + t\, f^*\underbrace{\left(\frac{x-y}{t}\right)}_{} \quad \cdots (2)$$

Notamos que

$$\begin{aligned} f^*(a(0)) &= a(0)\, g(a(0)) - f(g(a(0))) \\ &= -f(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dado que $g = a^{-1}$. También $\dfrac{df^*}{dv} = g(v)$

y $(f^*)'' \geq C > 0$ (estrictamente convexa)

$\Rightarrow$ $f^*$ tiene un mínimo global en $v = a(0)$.

Por lo tanto, $f^*(v) \longrightarrow +\infty$ si $|v| \to \pm\infty$

Mas aún, $f^*$ crece más rápido que cualquier función lineal en virtud de que

$$\lim_{v \to \pm\infty} \frac{df^*}{dv} = \lim_{v \to \pm\infty} g(v) = \pm\infty$$

Pero, $U_0(y) = \int_0^y u_0(x)\,dx$ crece a lo más linealmente, pues $u_0$ es acotada.

Por lo tanto, para $(x,t)$ fijo,

$$G(x,t,y) \to \infty \qquad \text{si } y \to \pm\infty.$$

concluímos que $G(x,t,y)$, con $(x,t)$ fijo, alcanza su mínimo en algún punto $y = y(x,t)$ (no necesariamente único).

Sea $y = y(x,t)$ uno de estos puntos que minimizan a $G$. Vamos a probar que el mapeo

$$x \mapsto y(x,t)$$

es no decreciente $\forall\, t > 0$ fijo.

Lema auxiliar 1 Para $x_1, x_2, t > 0$ dados, sean $y_1, y_2$ dos valores para los cuales $G(x_1,t,y)$, y $G(x_2,t,y)$ alcanzan su mínimo, respectivamente. Si $x_2 > x_1$ entonces $y_2 \geq y_1$.

Demostración Sea

$$H(s) := f^*(\sigma+s) - f^*(\sigma) +$$

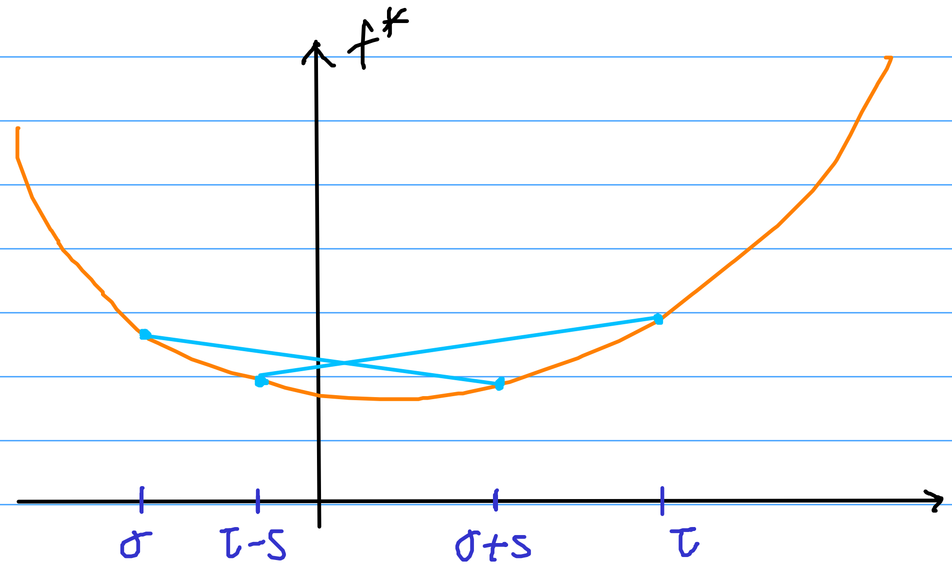
$$+ f^*(\tau - s) - f^*(\tau)$$

para $\sigma < \tau$, fijos y cualquier $s \in (0, \tau - \sigma)$. .

Como $f^*$ es estrictamente convexa

$$\frac{f^*(\sigma+s)-f^*(\sigma)}{s} < \frac{f^*(\tau)-f^*(\tau-s)}{s}$$

$\forall\, s \in (0, \tau-\sigma)$




Por lo tanto $H(s) < 0$, $\forall\, s \in (0, \tau-\sigma)$

Además,

$$0 = H(0) = H(\tau-\sigma)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H < 0 \quad \text{en} \quad (0, \tau-\sigma) \\ H(0) = H(\tau-\sigma) = 0 \end{cases}$$

Sean $x_1 < x_2$. Definimos:

$$s := \frac{x_2 - x_1}{t} > 0$$

$$\tau := \frac{x_2 - y_2}{t}, \qquad \sigma := \frac{x_1 - y_1}{t}$$

Por contradicción: suponemos que

$$y_2 < y_1.$$

Entonces,

$$s+\sigma = \frac{x_2-y_1}{t} < \frac{x_2-y_2}{t} = \tau$$

Es decir, $s \in (0, \tau-\sigma)$, con $\tau > \sigma$.

Por convexidad $H(s)<0$ que implica

$$f^*\left(\frac{x_2-y_1}{t}\right) + f^*\left(\frac{x_1-y_2}{t}\right) <$$

$$< f^*\left(\frac{x_2-y_2}{t}\right) + f^*\left(\frac{x_1-y_1}{t}\right)$$

Por hipótesis, $y_1$ minimiza $G(x_1,t,y)$:

$$G(x_2,t,y_1) = G(x_1,t,y_1) + tf^*\left(\frac{x_2-y_1}{t}\right) - tf^*\left(\frac{x_1-y_1}{t}\right)$$

$$\leq G(x_1,t,y_2) + tf^*\left(\frac{x_2-y_1}{t}\right) - tf^*\left(\frac{x_1-y_1}{t}\right)$$

$$< G(x_1,t,y_2) + tf^*\left(\frac{x_2-y_2}{t}\right) - tf^*\left(\frac{x_1-y_2}{t}\right)$$

$$\Rightarrow G(x_2, t, y_1) < v_0(y_2) + t f^*\left(\frac{x_2 - y_2}{t}\right)$$
$$= G(x_2, t, y_2).$$

¡ contradicción con la elección de $y_2$.

Conclusión : $y_2 \geq y_1$

$\square$