Lección 2.6 : La fórmula de Lax-Hopf.

Ley escalar de conservación

$$u_t + f(u)_x = 0 \qquad \cdots \quad (1)$$

$x \in \mathbb{R}$, $t>0$, $u = u(x,t) \in \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f''(u) \geq \delta > 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{R}$ caso convexo.

Problema de Cauchy: resolver (1) con

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \qquad \cdots \quad (2)$$

con $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Preliminares: trasformada de Legendre.

Sea $f \in C^2(\mathbb{R})$, con

- $f''(u) \geq \delta > 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\lim_{u \to \pm\infty} f'(u) = \pm\infty$

($a(u) := f'(u)$ es invertible.)

Definición Bajo estas hipótesis se define

$$(3) \; \cdots \quad f^*(v) := \max_{u \in \mathbb{R}} \big(uv - f(u) \big)$$

como la transformada de Legendre de f. $\forall\, v \in \mathbb{R}$

Observaciones:

(a) f^* está bien definida: $\forall v \in \mathbb{R}$ fijo, existe un único $u_* \in \mathbb{R}$ tal que $v = f'(u_*) = a(u_*)$ (a es invertible).
Así, $\psi_v(u) := uv - f(u)$ tiene un máximo único en $u = u_*$, ya que $\psi_v'(u_*) = 0$ y $\psi_v''(u_*) = -f''(u_*) < 0$.
Así $f^*(v) = u_* v - f(u_*)$.

Denotamos

$$g(u) := a^{-1}(u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Así, $u_* = g(v)$, y por lo tanto

$$f^*(v) = v g(v) - f(g(v)) \quad \cdots \quad (4)$$

(b)
$$(f^*)'(v) = v g'(v) + g(v) + - a(g(v)) g'(v) = g(v)$$

$a(g(v)) = v$

$$\therefore \quad (f^*)''(v) = g'(v) = \frac{1}{a'(g(v))} = \frac{1}{f''(g(v))} > 0$$

$f^* \in C^2(\mathbb{R})$ y estrictamente convexa.

Lema 1 Bajo estas hipótesis:

$$(f^*)^* = f.$$

Demostración

$$f^*(v) = \max_{u\in\mathbb{R}} (uv - f(u)) \geq uv - f(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \quad f(u) + f^*(v) \geq uv \qquad \forall v, u \in \mathbb{R}.$$

$$\therefore \quad f(u) \geq \sup_{v\in\mathbb{R}} \left(uv - f^*(v)\right).$$

Por otro lado

$$\sup_{w\in\mathbb{R}} \left(uw - f^*(w)\right) = \sup_{w\in\mathbb{R}} \left(uw - \sup_{v\in\mathbb{R}} (wv - f(v))\right)$$

$$= \sup_{w\in\mathbb{R}} \left(\inf_{v\in\mathbb{R}} \left[w(u-v) + f(v) \right] \right)$$

$$f \text{ convexa} \Rightarrow \quad f(v) + f'(u)(u-v) \geq f(u) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}$$

Tomando $w = f'(u)$:

$$\sup_{w\in\mathbb{R}} \left(uw - f^*(w)\right) \geq \inf_{v\in\mathbb{R}} \left(f'(u)(u-v) + f(v) \right)$$

$$\geq f(u)$$

combinando:

$$\sup_{w\in\mathbb{R}} \left(uw - f^*(w)\right) = \max_{w\in\mathbb{R}} \left(uw - f^*(w)\right)$$
$$= (f^*)^*(u)$$
$$= f(u) \qquad \forall u\in\mathbb{R}.$$
$\square$

<u>Teorema</u> (Lax)

Sea $f\in C^2(\mathbb{R})$, $f''(u)\geq\delta>0$, tal que
$$f'(u) = a(u) \to \pm\infty \quad \text{si } u\to\pm\infty.$$

Sea $u_0\in L^\infty(\mathbb{R})$. Entonces el problema de Cauchy (1), (2) tiene una única solución entrópica $u\in L^\infty(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ que satisface

$$f'(u(x_2,t)) - f'(u(x_1,t)) \leq \frac{x_2-x_1}{t} \qquad \cdots (5)$$

$\forall x_2\geq x_1$ y $\forall t>0$. Esta solución está determinada por

$$u(x,t) = g\left(\frac{x-y(x,t)}{t}\right) \qquad \cdots (6)$$

donde $g(u) := a^{-1}(u)$ $\forall u\in\mathbb{R}$, y $\mathbb{R}\ni y = y(x,t)$ es el único valor que minimiza el mapeo

$$(7)\cdots \quad y \longmapsto Q(x,t,y) := t\, f^*\left(\frac{x-y}{t}\right) + \int_0^y u_0(\xi)\,d\xi$$

f^* – transf. de Legendre de f. $\forall (x,t)$ c.d.s.

Observaciones:

(a) (5) $\Rightarrow$ la condición de entropía de Oleinik.

Tomando $2C = \dfrac{1}{\min f''} > 0$, por el teo. del valor medio

$$\frac{a(u(x_2,t)) - a(u(x_1,t))}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{f''(\theta)\left(u(x_2,t) - u(x_1,t)\right)}{x_2 - x_1} \leq \frac{1}{t}$$

con θ entre $u(x_1,t)$ y $u(x_2,t)$, $\forall\, x_2 > x_1$.
Esto implica que

$$u(x+\varepsilon, t) - u(x,t) < \frac{C\varepsilon}{t}$$

$\forall\,(x,t)$, $t>0$, $\forall\,\varepsilon>0$. $\Rightarrow$ Oleinik.

(b) caso particular Burgers $f(u) = \frac{1}{2}u^2$
$a(u) = u$

$$\Rightarrow \quad g(v) = v, \qquad f^*(v) = \frac{1}{2}v^2$$

$$\therefore \quad G(x,t,y) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-y)^2}{t} + \int_0^y u_0(\xi)\,d\xi$$

(Hopf)

(c) Si $f''>0$ todas las características emanan de un punto $(y,0)$.

Esto no es cierto en el caso general, $f \in C^2$, a menos que u_0 sea monótona ($\Rightarrow U_0 = \int^x u_0(s)$ es convexa).

<u>Teorema</u> (Kunik) Si $u_0 \in L^\infty$, monótonamente creciente, $f \in C^2$ entonces la única solución 'entrópica' de (1) - (2) es

$$u(x,t) = \partial_x H(x,t)$$

$$H(x,t) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \left(xy - tf(y) - U_0^*(y) \right)$$

con $U_0(y) = \int^y u_0(\xi)\, d\xi$ (convexa).

Representación de una solución de clase C^1 por pedazos:

Sea $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ una solución entrópica de (1) - (2) que además:

(i) u es de clase C^1 por pedazos

(ii) u es de soporte compacto en $\mathbb{R} \times [0,\infty)$

Así, definimos

$$V(x,t) := \int_{-\infty}^{x} u(\xi,t)\, d\xi$$

$$V_0(x) := V(x,0)$$

w.l.o.g. suponemos que $f(0)=0$

$$\left(f(u) \to f(u) - f(0) \right)$$

Integrando (1) ($u \in C^1$ por pedazos, (1) se cumple c.d.s., u soporte compacto):

$$0 = \int_{-\infty}^{x} u_t(\xi,t)\, d\xi + \int_{-\infty}^{x} f(u)_\xi \, d\xi$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{x} u(\xi,t)\, d\xi + f(u(x,t)) - \underbrace{f(\underbrace{u(-\infty,t)}_{=0})}_{=f(0)=0} \qquad \forall t>0$$

$$\Rightarrow \quad V_t + f(V_x) = 0 \quad \text{c.d.s.} \quad \ldots (8)$$

$$f(V_x) \geq a(v)(V_x - v) + f(v) \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}$$

$\downarrow f''>0$

$$\Rightarrow \quad V_t + a(v) V_x \leq v\, a(v) - f(v) \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}$$

$\ldots (9)$ c.d.s.

Fijamos $v \in \mathbb{R}$. Para $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$ dado, consideramos la característica que pasa por (x,t) y con pendiente $a(v)$. Intersecta al eje $t=0$ en el punto $y(x,t) = x - a(v)t$:

$$\Gamma_{(x,t)} := \Big\{ (\xi(\sigma),\sigma) \in \mathbb{R} \times [0,\infty) : \begin{aligned} \xi(\sigma) &= a(v)\sigma + y(x,t) \\ &= a(v)(\sigma - t) + x \end{aligned} \Big\}$$

Integramos (9) sobre $\Gamma_{(x,t)}$, $\sigma \in (0,t)$:

$$\int_0^t \Big[v_t\big(a(v)(\sigma-t) + x, \sigma\big) + a(v)\, v_x\big(a(v)(\sigma-t)+x,\sigma\big) \Big] \, d\sigma \le t\,(va(v) - f(v)).$$

Pero,

$$\frac{d}{d\sigma}\Big(v(\xi(\sigma),\sigma) \Big) = v_t(\xi(\sigma),\sigma) + a(v)\, v_x(\xi(\sigma),\sigma)$$

$$\Rightarrow \quad v(x,t) \le v(y,0) + t\,(va(v) - f(v)) \quad \cdots (10).$$

continuará...