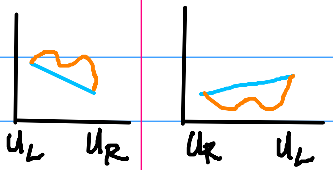
Lección 2.5 : Consecuencias de la condición de entropía.

Solución $u \in \mathcal{X}$, débil (C^1 por pedazos)

Σ discontinuidad, $\forall P \in \Sigma$ $u_R \neq u_L$ límites



(CEG) : $$\left[\alpha f(u_L) + (1-\alpha) f(u_R) - f(\alpha u_L + (1-\alpha) u_R)\right] \times \operatorname{sgn}[u] \leq 0 \qquad \forall \alpha \in [0,1]$$

(Lax) : $$f'(u_R) \leq s \leq f'(u_L)$$

donde $s = \dfrac{d\hat{x}}{dt}$ si $\Sigma = \{(\hat{x}(t), t)\}$, $\hat{x} \in C^1$.

Lax-Oleinik : En cada $P \in \Sigma$ se cumple

(LO) ... $$\frac{f(u) - f(u_R)}{u - u_R} \leq s = \frac{d\hat{x}}{dt} \leq \frac{f(u) - f(u_L)}{u - u_L}$$

Proposición En el caso general con $f \in C^2(\mathbb{R})$ y en la clase de soluciones débiles C^1 por pedazos ($u \in \mathcal{X}$) :

$$(CEG) \Rightarrow \begin{cases} (Lax) \\ (LO) \end{cases}$$

Demostración Suponemos que para $P \in \Sigma$, $u_R \neq u_L$. Tomando $\alpha \in (0,1)$, dividimos (CEG) entre $\alpha |u_R - u_L|$:

$$\frac{f(u_R) - f(\alpha u_L + (1-\alpha) u_L)}{\alpha [\![u]\!]} \leq \frac{[\![f(u)]\!]}{[\![u]\!]}$$

$\forall u \in \begin{cases} (u_L, u_R), & u_L < u_R \\ (u_R, u_L), & u_L > u_R \end{cases}$ se tiene que

$$u = \alpha u_L + (1-\alpha) u_R, \quad \text{con} \quad \alpha \in (0,1)$$

Así,
$$\begin{aligned} u - u_R &= \alpha u_L + (1-\alpha) u_R - u_R \\ &= -\alpha [\![u]\!] \end{aligned}$$

Usando (RH) : $\dfrac{d\hat{x}}{dt} = \dfrac{[\![f(u)]\!]}{[\![u]\!]}$, obtenemos

$$\frac{f(u) - f(u_R)}{u - u_R} \leq \frac{d\hat{x}}{dt} \qquad \cdots (1)$$

Analogamente :

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{[\![f(u)]\!]}{[\![u]\!]} \leq \frac{f(u) - f(u_L)}{u - u_L} \qquad \cdots (2)$$

(1), (2) $\Rightarrow$ (LO).

Tomando límite $\left\{ \begin{array}{l} u \to u_L \text{ en } (2) \\ u \to u_R \text{ en } (1) \end{array} \right\} \Rightarrow$ (Lax)

$\square$

Condición de entropía de Oleinik:

$f \in C^2$, $f'' \geq \delta > 0$ $\forall u$ (caso convexo)
$u \in L^{\infty}(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ solución débil, es entrópica en sentido de Oleinik si $\exists$ $C > 0$ tal que $\forall a > 0$ y $\forall x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, se tiene que

$$u(x+a,t) - u(x,t) < \frac{Ca}{t} \quad \cdots \quad (O)$$

<u>Proposición</u> En el caso convexo, $f'' \geq \delta > 0$, $f \in C^2$ y en la clase $u \in \mathcal{K}$ las condiciones (Lax), (LO) y (O) son equivalentes.

<u>Demostración</u> Basta con demostrar que (Lax) $\Leftrightarrow$ (O).

Suponemos (O). Sea $P = (x,t) \in \Sigma$, un punto de discontinuidad de u. En este caso

$$(O) \Rightarrow \quad \underbrace{u(x+\varepsilon,t)}_{u_R} - \underbrace{u(x-\varepsilon,t)}_{u_L} < \frac{2C\varepsilon}{t} \quad \forall \varepsilon > 0$$

Tomando el límite cuando $\varepsilon \to 0^+$ $(u \in \mathcal{K})$ obtenemos

$$u_R < u_L \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{f'' \geq \delta > 0 \\ \text{caso convexo}}} \quad (\text{Lax})$$

Suponiendo (Lax). Si (x,t) es un punto de continuidad de u $(u \in \mathcal{X})$ entonces

$$u(x+\varepsilon,t) - u(x-\varepsilon,t) < C(t)\,\varepsilon \qquad \begin{array}{l} \forall \varepsilon>0 \\ \forall t>0 \\ \text{fijo} \end{array}$$

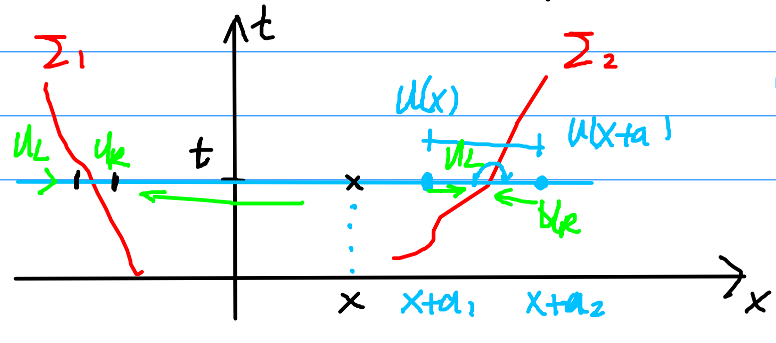
Se puede demostrar que si $f'' \geq \delta > 0$ entonces $C(t) = \dfrac{1}{\delta t}$ (ejercicio).

Si $(x,t) \in \Sigma$, es un punto de discontinuidad de u entonces $u_R < u_L$ (por Lax). Esto implica que

$$\underbrace{u(x+\varepsilon,t)}_{\sim u_R} - \underbrace{u(x-\varepsilon,t)}_{\sim u_L} < 0 < \frac{C\varepsilon}{t}$$

si $0 < \varepsilon \ll 1$ $(u \in \mathcal{X},\ \Sigma \in C^1)$.

La desigualdad $\forall \varepsilon>0$ resulta de aplicar la condición de Oleinik en puntos de continuidad de u para $t>0$ fijo, hasta encontrar una desigualdad a la derecha o a la izquierda.



$u(x+a) - u(x) < Ca$

$\forall a$

$u_R < u_L$

$f''>0$ salto entrópico

El valor de $u=u_R$ en la discontinuidad a la izquierda Σ_1 debe ser menor que el valor de $u=u_L$ en Σ_1. Asimismo, $u=u_L$ en Σ_2 es mayor que $u=u_R$ en Σ_2.

Así, todos los saltos de u (conjunto numerable) satisfacen (0). (tienen el mismo signo $\forall a>0$, $\forall t>0$.)

$\square$

Contracción en la norma L^1

Proposición Sea $f \in C^2(\mathbb{R})$, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Supongamos que el problema de Cauchy

$$\left.\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

tiene una solución débil en la clase $\mathcal{K}$ que satisface la (CEG). Entonces ésta es única (en la clase $\mathcal{K}$ que satisfacen (CEG)).

Teorema (Keyfitz, 1974)

Sea $f \in C^2$, sean u, v soluciones débiles de (3), $u, v \in \mathcal{K}$, que satisfacen (CEG).

Entonces,

$$\| u(\cdot,t) - v(\cdot,t) \|_{L^1(\mathbb{R})}$$

es una función no decreciente de $t \geq 0$.

Dem. Ver notas $\square$

Dem. de la unicidad: Entonces, como

$$u(x,0) = v(x,0) = u_0(x) \quad \text{c.d.s. en } \mathbb{R}$$

por el teorema

$$0 \leq \| u(\cdot,t) - v(\cdot,t) \|_{L^1} \leq \| u(\cdot,0) - v(\cdot,0) \|_{L^1} \equiv 0$$

$$\Rightarrow \quad u(\cdot,t) = v(\cdot,t) \quad \text{c.d.s. en } x \in \mathbb{R} \quad \forall t \geq 0 \quad \square$$

3.2 Fórmula de Lax-Hopf.

Ley de conservación

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad \cdots (1)$$

con $f \in C^2$, $f'' \geq \delta > 0$ $\forall u$. Condición inicial

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \cdots (2)$$

con $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$.