Lección 2.4 : Condición de entropía generalizada (continuación).

Sea $u \in \mathcal{X}$, solución débil y entrópica de clase C^1 por pedazos

$$(1) \ldots \quad [\![(f(u)-f(k))\,\mathrm{sgn}\,(u-k)]\!] \leq \frac{d\hat{x}}{dt} [\![|u-k|]\!]$$

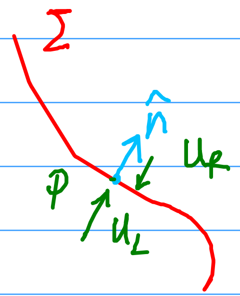
sobre $\Sigma = \{ x = \hat{x}(t) \}$ discontinuidad y $\forall\, k \in \overline{\Omega} = [a,b]$.

Definición (condición de entropía generalizada)

Una solución débil u de clase C^1 por pedazos satisface la condición de entropía generalizada si sobre cada punto de una discontinuidad Σ se cumple :

$$(2) \ldots \quad \left[\alpha f(u_L) + (1-\alpha) f(u_R) - f(\alpha u_L + (1-\alpha) u_R) \right] \mathrm{sgn}\, [\![u]\!] \leq 0$$

$\forall\, \alpha \in [0,1]$.



$$[\![u]\!] = u_R - u_L$$

Lema 1 En la clase de soluciones débiles C^1 por pedazos (1) y (2) son equivalentes.

Demostración:

(1) $\Rightarrow$ (2) : Fijamos $p \in \Sigma$, $u_R \neq u_L$. Sea I el intervalo abierto

$$I = \begin{cases} (u_L, u_R), & \text{si } u_R > u_L \\ (u_R, u_L), & \text{si } u_R < u_L \end{cases}$$

Ya se probó que (1) implica Rankine-Hugoniot:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} [\![u]\!] = [\![f(u)]\!]$$

Sea $\alpha \in (0,1)$. Entonces tomando

$$k := \alpha u_L + (1-\alpha) u_R \in I \subset [a,b].$$

Entonces,

$$(1) \Rightarrow \left(f(u_R) - f(k) \right) \operatorname{sgn}(u_R - k) +$$

$$- \left(f(u_L) - f(k) \right) \operatorname{sgn}(u_L - k) \leq$$

$$\leq \frac{d\hat{x}}{dt} \left(|u_R - k| - |u_L - k| \right)$$

Dado que $0 < \alpha < 1$, notamos que

$$\operatorname{sgn}(u_R-k) = \operatorname{sgn}(\alpha(u_R-u_L))$$
$$= \operatorname{sgn}(u_R-u_L) = \operatorname{sgn}[\![u]\!]$$
$$\operatorname{sgn}(u_L-k) = \operatorname{sgn}((1-\alpha)(u_L-u_R))$$
$$= \operatorname{sgn}(u_L-u_R) = -\operatorname{sgn}[\![u]\!]$$

Sustituyendo

$$\left[f(u_R)+f(u_L)-2f(k)\right]\operatorname{sgn}[\![u]\!]$$
$$\leq \frac{[\![f(u)]\!]}{[\![u]\!]}\left(|u_R-k|-|u_L-k|\right)$$
$$= \frac{[\![f(u)]\!]}{[\![u]\!]}\left(|\alpha||u_R-u_L|-|1-\alpha||u_R-u_L|\right)$$
$$= \frac{[\![f(u)]\!]}{[\![u]\!]}|u_R-u_L|(2\alpha-1)$$
$$= [\![f(u)]\!]\operatorname{sgn}[\![u]\!](2\alpha-1)$$

es decir,

$$\left[f(u_R)+f(u_L)-2f(k)-[\![f(u)]\!](2\alpha-1)\right]\operatorname{sgn}[\![u]\!] \leq 0$$

$\Rightarrow$ (2) en el caso $0<\alpha<1$.

Pero (2) se satisface trivialmente si $\alpha=0$ ó $\alpha=1$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Supongamos (2) es válida en toda discontinuidad y $\forall k \in [a,b]$.

Si $k \in I \subset [a,b]$ entonces se invierte el argumento anterior usando que

$$k = \alpha u_L + (1-\alpha) u_R$$

para un cierto $\alpha \in (0,1)$, para obtener (1).

Si por el contrario $k \notin I$ entonces tenemos dos casos :

$$\text{(i)} \quad a \leq k \leq \min\{u_L, u_R\}$$

$$\text{(ii)} \quad \max\{u_L, u_R\} \leq k \leq b$$

En el caso (i) : la desigualdad (1) toma la forma

$$f(u_R) - f(u_L) \leq \frac{d\hat{x}}{dt}(u_R - u_L)$$

En el caso (ii) :

$$f(u_R) - f(u_L) \geq \frac{d\hat{x}}{dt}(u_R - u_L)$$

Pero ambas desigualdades se cumplen en forma de igualdad por Rankine-Hugoniot. Esto prueba (1) $\forall k \in \bar{\Omega} = [a,b]$

$\square$

Consecuencias de (2):

Caso I: $[\![u]\!] > 0$.

Si $u_R > u_L$ entonces (2) se lee

$$\underbrace{\alpha f(u_L) + (1-\alpha) f(u_R)}\ \leq\ \underbrace{f(\alpha u_L + (1-\alpha) u_R)}$$

$\forall\ \alpha \in [0,1]$.

La solución es entrópica (de clase C^1 por pedazos) ssi al calcular $\forall\ p \in \Sigma$, discontinuidad, los límites u_R y u_L, éstos satisfacen que la gráfica de f restringida a $I = (u_L, u_R)$ está situada por encima de su cuerda.

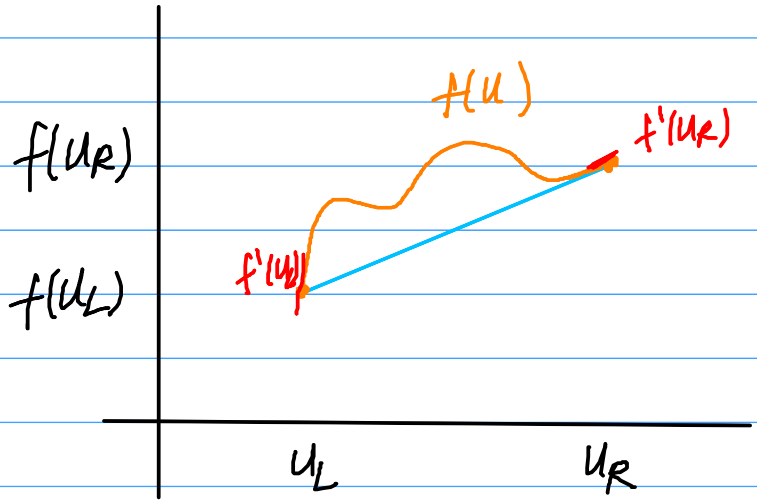
La cuerda tiene como ecuación

$$c(u) = \frac{[\![f(u)]\!]}{[\![u]\!]}(u - u_L) + f(u_L)$$

$$= \alpha f(u_L) + (1-\alpha) f(u_R)$$

con $\alpha = -\dfrac{(u - u_R)}{[\![u]\!]} \in [0,1]$

$\forall\ u \in [u_L, u_R]$



$u_R > u_L$

Caso II : $[\![u]\!] < 0$

Si $u_R < u_L$ entonces (2) se lee

$$\alpha f(u_L) + (1-\alpha) f(u_R) \geq f(\alpha u_L + (1-\alpha) u_R)$$

$$\forall \alpha \in [0,1]$$

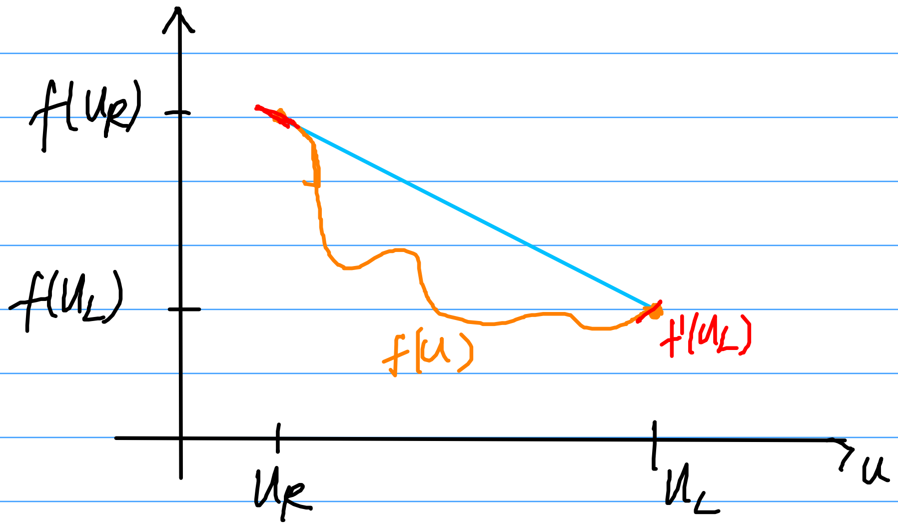
La gráfica de f restringida a $I = (u_R, u_L)$ está situada por debajo de su cuerda

$$c(u) = \frac{[\![f(u)]\!]}{[\![u]\!]}(u-u_R) + f(u_R)$$

$$= \alpha f(u_L) + (1-\alpha) f(u_R)$$

con $\alpha = -\dfrac{(u-u_R)}{[\![u]\!]} \in [0,1]$

$u \in [u_R, u_L]$



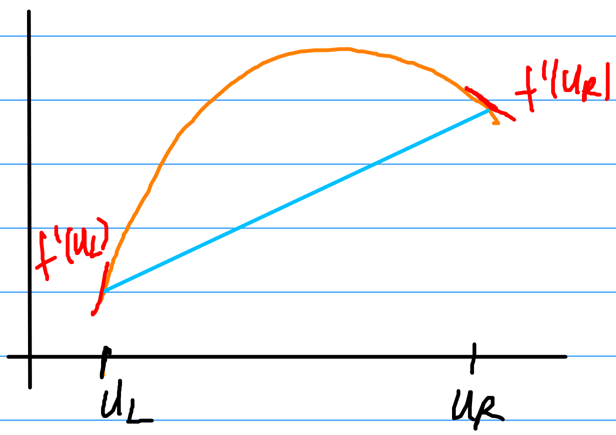
Ejemplo:

I. Si f es estrictamente cóncava

$$f''(u) \leq -\delta < 0 \qquad \forall u \in [a,b]$$

entonces Σ es admisible (entropía)
ssi $\forall P \in \Sigma$ los límites satisfacen

$$u_L < u_R$$

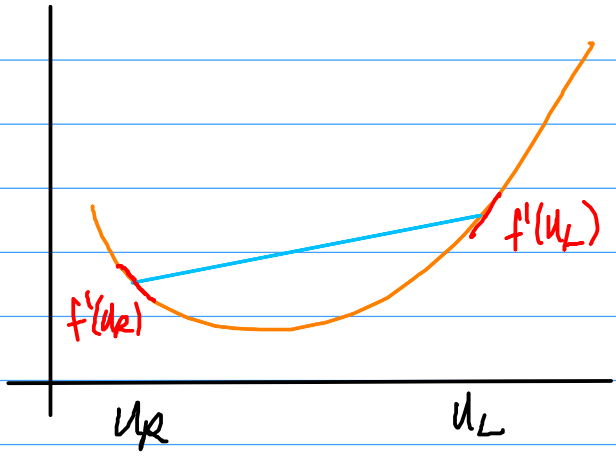


II. Si f es estrictamente convexa

$$f''(u) \geq \delta > 0 \qquad \forall u \in [a,b]$$

entonces tenemos solución entrópica si $\forall P \in \Sigma$, discontinuidad,

$$u_R < u_L .$$



<u>condición de entropía de Lax</u>

Si $\Sigma = \{x = \hat{x}(t)\}$ discontinuidad, $s = \frac{d\hat{x}}{dt}$; Σ satisface la condición de Lax ssi

$$f'(u_R) \leq s \leq f'(u_L)$$

sobre Σ. $\quad s = \frac{[\![f(u)]\!]}{[\![u]\!]}$, $\quad u_R \neq u_L$.

Si $f'' \begin{cases} \geq \delta > 0 \\ \leq -\delta < 0 \end{cases} \quad \therefore \quad f'(u_R) < s < f'(u_L)$