Lección 2.3 : Condición de entropía generalizada.

Teorema (equivalencia de Kruzkov)

Una función $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty); \bar{\Omega})$, $\bar{\Omega} = [a,b]$ acotada, es una solución entrópica de

$$\left.\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$f \in C^2(\mathbb{R};\Omega)$, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R};\bar{\Omega})$ si y sólo si satisface la desigualdad

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \Big(\varphi_t |u-k| + \varphi_x \big(f(u)-f(k)\big) \operatorname{sgn}(u-k) \Big) \, dx\, dt \; +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,0) \, |u_0(x) - k| \, dx \geq 0 \qquad \cdots (2)$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}_+ = \{ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) : \varphi \geq 0 \}$, $\forall k \in \bar{\Omega}$ arbitrario.

Demostración:

"$\Rightarrow$" Si $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,\infty), \bar{\Omega})$ es solución entrópica entonces (2) se satisface tras sustituir el par de Kruzkov

$$(E, \Psi) = \big(|u-k|, (f(u)-f(k)) \operatorname{sgn}(u-k) \big)$$

(par de entropía generalizado) en la desigualdad de entropía.

"$\Leftarrow$" Suponiendo $u \in L^\infty$ que satisface (2) $\forall k \in \bar{\Omega} = [a,b]$. Tomando $k=a$:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi_t u + \varphi_x f(u) \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,0) u_0(x) \, dx$$

$$\geq a \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi_t \, dx \, dt + a \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,0) \, dx +$$

$$+ f(a) \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi_x \, dx \, dt \underset{\varphi \in \mathcal{D}_+}{=} 0$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}_+$, ya que $\operatorname{sgn}(u-a) = \operatorname{sgn}(u_0 - a) = 1$.

Igualmente, tomando $k=b$:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\varphi_t u + \varphi_x f(u) \right) dx dt +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,0) u_0(x) \, dx \leq 0$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}_+$.

$$\Rightarrow \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\varphi_t u + \varphi_x f(u) \right) dx \, dt +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,0) u_0(x) \, dx = 0$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}_+$

Usando $-\varphi$ la desigualdad es cierta $\forall \varphi \in \mathcal{D}_- = \{ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) : \varphi \leq 0 \}$.

$\therefore$ no importa el signo de φ. Se puede verificar que

$$0 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \phi_t u + \phi_x f(u) \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x,0) u_0(x) \, dx$$

$$\forall \ \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$$

$\therefore$ u es solución débil de (2).

Sea $(E, \Psi) \in C(\mathbb{R}) \times C(\mathbb{R})$ con E convexa (un par de entropía generalizado). Sea $\varphi \in \mathcal{D}_+$. Para cada $\alpha > 0$, se definen:

$$E_\alpha = b_0 + b_1 u + \sum_{j=1}^{M} a_j |u - k_j|$$

b_0, b_1, a_j

$a_j > 0$

$$\Psi_\alpha = b_1 f(u) + \sum_{j=1}^{M} a_j (f(u) - f(k_j)) \operatorname{sgn}(u - k_j)$$

y

$$J_\alpha := \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi_t E_\alpha(u) + \varphi_x \Psi_\alpha(u) \, dx \, dt + $$
$$+ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,0) E_\alpha(u_0(x)) \, dx$$

$$J := \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi_t E(u) + \varphi_x \Psi(u) \, dx \, dt +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,0) E(u_0(x)) \, dx$$

Así, por la desigualdad (2):

$$J_\alpha = \sum_{j=1}^{M} a_j \left[\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi_t |u - k_j| + \varphi_x (f(u) - f(k_j)) \times \right.$$
$$\times \operatorname{sgn}(u - k_j) \, dx\,dt$$
$$\left. + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,0) |u_0 - k_j| \, dx \right] \geq 0$$

Por convergencia uniforme de $(E_\alpha, \Psi_\alpha) \to (E, \Psi)$ en $[a,b]$ cuando $\alpha \to 0^+$ obtenemos

$$J_\alpha \to J \geq 0$$

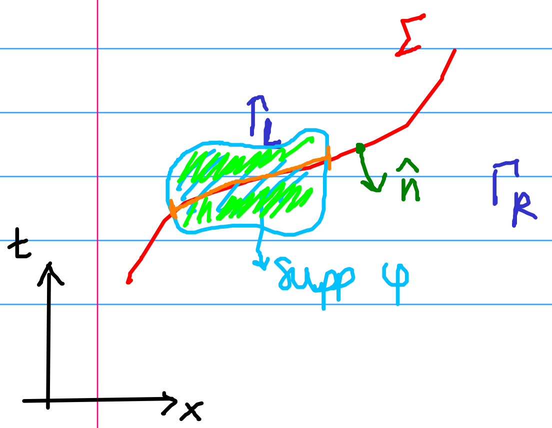
$\therefore$ u solución es entrópica

$\square$

Condición de entropía generalizada

$\mathcal{K} := \{$ clase de soluciones débiles de (1) que son C^1 por pedazos, es decir, $\exists\ \Sigma_j,\ j \in \mathbb{N}$ discontinuidades $\}$

Sea $\Sigma = \{ (\hat{x}(t), t) \in \mathbb{R} \times [t_1, t_2] \}$



$\Gamma_R = \{ (x,t) \in \mathbb{R} \times [t_1, t_2] : x > \hat{x}(t) \}$

$\Gamma_L = \{ (x,t) \in \mathbb{R} \times [t_1, t_2] : x < \hat{x}(t) \}$

Sea $\varphi \in \mathcal{D}_+$ tal que $\operatorname{supp} \varphi \subset \{t \geq \delta > 0\}$.

Sea (E, Ψ) par de entropía generalizado

$(E^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)$ " " suave $\forall \varepsilon > 0$.

Sea $\mathcal{O}_R := \Gamma_R \cap (\operatorname{supp} \varphi)^\circ$

$\mathcal{O}_L := \Gamma_L \cap (\operatorname{supp} \varphi)^\circ$

Si $u \in \mathcal{X} \Rightarrow u$ es sol. clásica en $\mathcal{O}_R, \mathcal{O}_L$.

Por la desigualdad de entropía para $(E^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)$ por conv. uniforme y aplicando el teorema de la divergencia en $\mathcal{O}_R$ y $\mathcal{O}_L$:

$$0 \leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\varphi_t E(u) + \varphi_x \Psi(u) \right) dx\, dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{\partial \mathcal{O}_L} \left(\varphi E^\varepsilon(u) \hat{n}_t + \varphi \Psi^\varepsilon(u) \hat{n}_x \right) d\sigma + \right.$$

$$- \int_{\partial \mathcal{O}_R} \left(\quad \text{"} \quad \right) d\sigma +$$

$$- \int_{\mathcal{O}_R} \varphi \underbrace{\left(E^\varepsilon(u)_t + \Psi^\varepsilon(u)_x \right)}_{=0, \ u \in C^1(\mathcal{O}_R)} dx\, dt$$

$$\left. - \int_{\mathcal{O}_L} \varphi \underbrace{\left(E^\varepsilon(u)_t + \Psi^\varepsilon(u)_x \right)}_{=0, \ u \in C^1(\mathcal{O}_L)} dx\, dt \right]$$

$$\Rightarrow 0 \leq -\int_{\Sigma \cap \operatorname{supp} \varphi} \varphi \left([\![E(u)]\!] \hat{n}_t + [\![\Psi(u)]\!] \hat{n}_x \right) d\sigma$$

$\forall \varphi$ arbitraria.

$$\Rightarrow \quad [\![E(u)]\!] \hat{n}_t + [\![\Psi(u)]\!] \hat{n}_x \leq 0$$

sobre Σ.

$$\Rightarrow \quad -\frac{d\hat{x}}{dt} [\![E(u)]\!] + [\![\Psi(u)]\!] \leq 0$$

sobre Σ.

$\forall (E, \Psi)$ par de entropía generalizado.

Ejercicio: el argumento es reversible.

<u>Lema</u> Sea $u \in X$ solución débil de (1). Entonces u es solución entrópica si y sólo si

$$(*) \quad [\![E(u)]\!] \hat{n}_t + [\![\Psi(u)]\!] \hat{n}_x \leq 0$$

sobre toda discontinuidad Σ, $(\hat{n}_t, \hat{n}_x) = \hat{n}$ normal a Σ (apunta al lado derecho de Σ), y para cualquier (E, Ψ) par de entropía generalizado.

<u>Corolario</u> Si $\Sigma = \{ (\hat{x}(t), t) \in \mathbb{R} \times I \}$ entonces

$$-\frac{d\hat{x}}{dt} [\![E(u)]\!] + [\![\Psi(u)]\!] \leq 0$$

Definición $u \in X$, solución débil de (1) satisface la desigualdad de entropía de Kruzkov sobre Σ,

$$(3) \cdots \quad [\![|u-k|]\!] \hat{n}_t + [\![(f(u)-f(k)) \operatorname{sgn}(u-k)]\!] \hat{n}_x \leq 0$$

sobre Σ, $\forall\, k \in \bar{\Omega} = [a,b]$.

Lema Sea $u \in X$. Entonces u es solución entrópica de (1) si y sólo si u es solución clásica fuera de $\Sigma = \bigcup \Sigma_j$, Σ_j discontinuidad de u, y satisface (3) sobre cada Σ_j, $\forall\, k \in \bar{\Omega}$.

Demostración:

"$\Rightarrow$" Si $u \in X$ es solución entrópica de (1)
$\Rightarrow$ u es solución clásica fuera de Σ, y se cumple (*) $\forall$ par (E, Ψ).

Sustituyendo el par de Kruzkov obtenemos (3).

"$\Leftarrow$" $u \in X$, sol. clásica de (1) fuera Σ y sobre Σ se cumple (3).

Sobre Σ, definimos u_R, u_L.
Escogemos $k = u_R$:

$(3) \Rightarrow \quad \hat{n}_t \, |u_R - u_L| + [\![f(u)]\!] \operatorname{sgn} [\![u]\!] \, \hat{n}_x$

≥ 0

Análogamente, $k = u_L$:

$(3) \Rightarrow \quad \hat{n}_t \, |u_R - u_L| + \hat{n}_x \, [\![f(u)]\!] \operatorname{sgn} [\![u]\!] \leq 0$

$\Rightarrow$ Rankine-Hugoniot y u es sol. débil.

Por el teorema de equivalencia

$u \in X \subset L^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty); \bar{\Omega})$ satisface (2)

y por lo tanto es entrópica

$\square$