Lección 2.2 : Solución entrópica. Par de Kruzkov.

Ley de conservación escalar en 1-d :

(1) ... $u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$

con $u = u(x,t) \in \Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$, abierto y acotado $(-\infty < a < b < \infty)$, $f \in C^2(\mathbb{R})$.

Notación: $a(u) := f'(u) \in C^1(\mathbb{R})$ velocidad característica

Problema de Cauchy: resolver (1) sujeta a

(2) ... $u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}$

con $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Solución débil : $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty); \Omega)$ es sol. débil de (1) y (2) si

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(u \phi_t + f(u) \phi_x \right) dx\,dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x,0) u_0(x)\, dx = 0 \quad \ldots (3)$$

$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) = \mathcal{D}$.

Supongamos adicionalmente que existe un par de entropía (E, Ψ) para (1) :

- $E \in C^2(\Omega)$, estrictamente convexa, $E''(u) \geq \delta > 0$, $\forall\, u \in \Omega$,

- $\Psi \in C^1(\Omega)$, tal que

$$E'(u)a(u) = \Psi'(u), \quad \forall\, u \in \Omega \qquad \text{(4)} \ldots$$

En este caso, una sol. débil es <u>entrópica</u> si

$$\rightarrow \quad E(u)_t + \Psi(u)_x \leq 0 \qquad \ldots \text{(5)}$$

en sentido de distribuciones, es decir,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\varphi_t E(u) + \varphi_x \Psi(u) \right) dx\,dt + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,0) u_0(x)\, dx \geq 0 \qquad \ldots \text{(6)}$$

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}_+ = \left\{ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R}) \; : \; \varphi \geq 0 \right\}.$$

Nota: sabemos que si $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ es solución de (1) y (2) entonces (5) se satisface en forma de igualdad.

Observaciones:

(i) La función $E(u) = \frac{1}{2}u^2$ es función de entropía de (1). El flujo es:

$$\Psi(u) = u f(u) - \int_0^u f(s)\, ds$$

ya que $\quad \Psi'(u) = uf'(u) + f(u) - f(u)$

$$= u\,a(u)$$

$$= E'(u)\,a(u) \quad \Rightarrow \quad (H).$$

(ii) Si f es estrictamente convexa, $f''(u) \geq \delta > 0 \ \forall\, u \in \Omega$, podemos escoger

$$E(u) = f(u), \qquad \Psi(u) = \int_0^u a(s)^2\,ds.$$

ya que $\quad \Psi'(u) = a(u)^2 = E'(u)\,a(u).$

(iii) De hecho, toda función estrictamente convexa es función de entropía:

$$\Psi(u) := \int_0^u E'(s)\,a(s)\,ds.$$

¿Podemos extender la noción de par de entropía al caso $(E, \Psi) \in C(\Omega) \times C(\Omega)$?

<u>Lema 1</u> Sea $E : \Omega \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces E es localmente el límite uniforme de funciones convexas de clase C^∞, es decir, existe una sucesión $\{E^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ de funciones suaves y convexas tales que $E^\varepsilon \to E$ uniformemente en compactos de Ω cuando $\varepsilon \to 0^+$. Podemos

definir también una única función de flujo de entropía, $\Psi : \Omega \to \mathbb{R}$, continua asociada a E como

$$(7) \cdots \quad \Psi(u) = E(u)a(u) - E(0)a(0) - \int_0^u E(s) f''(s)\, ds$$

en el sentido de que la desigualdad (6) se preserva. Este par (E, Ψ) es un par de entropía generalizado.

Demostración: $\forall\, \varepsilon > 0$ definimos E^ε como el alisamiento de E:

$$E^\varepsilon(u) := (\eta_\varepsilon * E)(u) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_\varepsilon(\xi) E(u-\xi)\, d\xi$$

E convexa $\Rightarrow$ E continua.

Por propiedades del alisador:

- $E^\varepsilon \to E$ uniformemente en compactos de Ω si $\varepsilon \to 0^+$
- $E^\varepsilon \in C^\infty$ $\forall\, \varepsilon > 0$.

E^ε es convexa $\forall\, \varepsilon > 0$. En efecto, dado que $\eta_\varepsilon > 0$ tenemos que $\forall\, u, v \in \Omega$, $\forall\, \lambda \in [0,1]$,

$$E^\varepsilon((1-\lambda)u + \lambda v) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_\varepsilon(\xi) E((1-\lambda)u + \lambda v - \xi)\, d\xi$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_\varepsilon(\xi) E\big((1-\lambda)(u-\xi) + \lambda(v-\xi)\big)\, d\xi$$

$\eta_\varepsilon > 0$
E convexa

$$\leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_\varepsilon(\xi)\left[(1-\lambda)E(u-\xi) + \lambda E(v-\xi)\right] d\xi$$

$$= (1-\lambda)E^\varepsilon(u) + \lambda E^\varepsilon(v).$$

$\therefore$ E^ε es convexa.

Para cada $\varepsilon > 0$ definimos

$$\Psi^\varepsilon(u) := \int_0^u (E^\varepsilon)'(s)\, a(s)\, ds$$

Así $(E^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)$ es un par de entropía $\forall \varepsilon > 0$, y satisface

$$(E^\varepsilon)'(u) a(u) = (\Psi^\varepsilon)'(u) \quad \forall u.$$

Integrando por partes:

$$\Psi^\varepsilon(u) = E^\varepsilon(u)a(u) - E^\varepsilon(0)a(0) + - \int_0^u E^\varepsilon(s) f''(s)\, ds.$$

$$\to \Psi(u) = E(u)a(u) - E(0)a(0) - \int_0^u E(s) f''(s)\, ds$$

uniformemente en compactos de Ω cuando $\varepsilon \to 0^+$.

y entrópica

Finalmente, suponiendo que $u \in L^\infty(\mathbb{R};\Omega)$ es solución débil de (1) y (2), y entrópica, para cada par de entropía suave $(E^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)$ se satisface la desigualdad (6). Por convergencia uniforme

$$I(\varepsilon) := \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \Big[\varphi_t \big(E(u) - E^\varepsilon(u) \big) + \varphi_x \big(\Psi(u) - \Psi^\varepsilon(u) \big) \Big] \, dx \, dt +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,0) \big(E(u_0(x)) - E^\varepsilon(u_0(x)) \big) dx$$

$$\longrightarrow 0 \quad \text{si } \varepsilon \to 0^+.$$

$\therefore$ la desigualdad (6) se preserva para el nuevo par (E, Ψ)

$\square$

<u>Definición</u> una solución débil de (1)-(2), es solución entrópica o admisible si $\forall$ función de entropía convexa $E \in C(\Omega)$, con flujo $\Psi \in C(\Omega)$, se cumple (6) $\forall \varphi \in \mathcal{D}_+$.

Observaciones :

(a) Si $u \in C^1$ es solución clásica y entrópica y $(E, \Psi) \in C$ entonces (6) se cumple como igualdad.

(b) En algunos textos (Smoller) definen solución entrópica como (6) $\forall$

$$\varphi \in \tilde{\mathcal{D}}_+ = \left\{ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times[0,\infty);\mathbb{R}) : \varphi \geq 0 \right\}$$

Pero tiene consecuencias en unicidad (ver Serre vol. 1, ejercicio 2.12)

Como sólo necesitamos $E \in C(\Omega)$, convexa. Definimos el par de Kruzkov :

$$(8) \begin{cases} E(u) = |u-k| \\ \Psi(u) = (f(u)-f(k))\,\mathrm{sgn}\,(u-k) \end{cases}$$

con $k \in \Omega = (a,b)$, fijo. Aquí,

$$\mathrm{sgn}(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } s>0 \\ 0, & \text{si } s=0 \\ -1, & \text{si } s<0 \end{cases}$$

y E es convexa.

Ejercicio : Probar que (8) es un par de entropía en el sentido del Lema 1.

Lema auxiliar (interpolación lineal)

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función estrictamente convexa, $[a,b]$ compacto. Entonces $\forall\, \alpha>0$ existe f_α convexa tal que:

(i) $f(u) \le f_\alpha(u) \le f(u)+\alpha,$

$$\forall\, u\in[a,b],\quad \forall\, \alpha>0$$

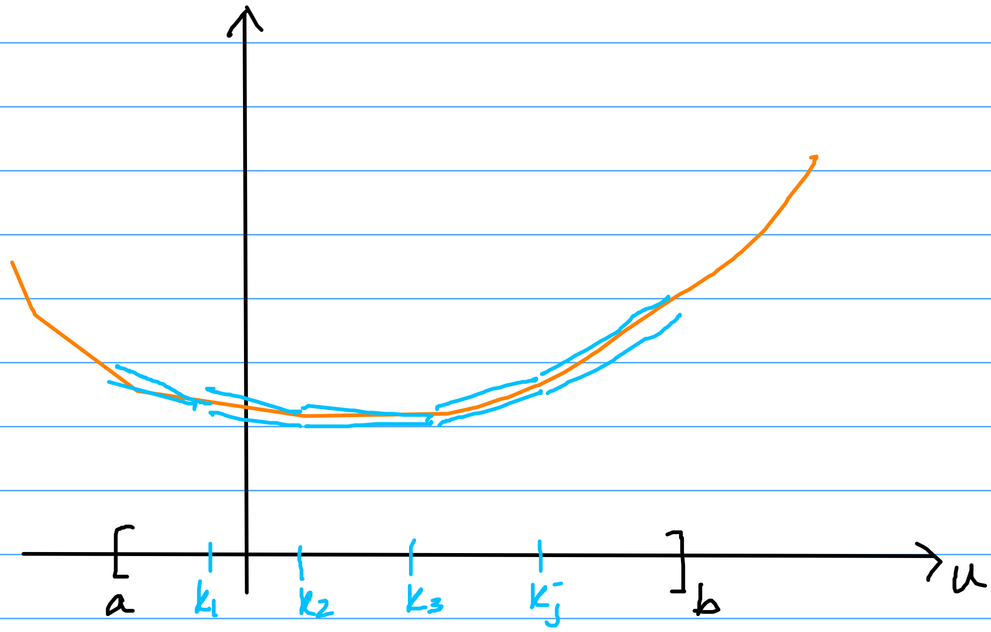
(ii) cada $f_\alpha = f_\alpha(u)$, $\alpha>0$, tiene la forma

$$f_\alpha(u) = b_0 + b_1 u + \sum_{j=1}^{M} a_j\,|u-k_j|$$

donde $\alpha = O(1/M)$, $M\in\mathbb{Z}_+$, $k_j\in[a,b]$ y b_0, b_1, a_j son constantes con $a_j>0$.

Mas aún, f_α converge uniformemente a f en $[a,b]$ cuando $\alpha\to 0^+$ $(M\to\infty)$.

Referencia: R.T. Rockafellar, convex analysis, Princeton Univ. Press, 1970.



Lema 2 Sea $\overline{\Omega} = [a,b]$, y $E : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ convexa. Entonces $\forall \alpha > 0$ existe E_α convexa, con flujo de entropía $\Psi_\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$, tales que:

(i) $E(u) \leq E_\alpha(u) \leq E(u) + \alpha, \quad \forall u, \forall \alpha > 0$

(ii) E_α tiene la forma

$$E_\alpha(u) = b_0 + b_1 u + \sum_{j=1}^{M} a_j |u - k_j|,$$

$a_j > 0$, b_0, b_1 const., $k_j \in [a,b]$,

$\alpha = O(1/M)$, $M \in \mathbb{Z}_+$, y

$$\Psi_\alpha(u) = b_1 f(u) + \sum_{j=1}^{M} a_j (f(u) - f(k_j)) \times$$
$$\times \operatorname{sgn}(u - k_j)$$

Finalmente (E_α, Ψ_α) converge uniformemente a (E, Ψ) en $[a,b]$ cuando $\alpha \to 0^+$ $(M \to \infty)$.

<u>Dem.</u> Se deduce del lema auxiliar. La forma de Ψ_α resulta de resolver

$$\Psi = E(u)a(u) - E(0)a(0) + - \int_0^u E(s)\, f''(s)\, ds$$

para cada E_α. La convergencia uniforme de Ψ_α se deduce de la conv. uniforme de E_α

$\square$