Lección 2.17 : Teorema de unicidad de Kruzkov. Existencia y unicidad de la solución entrópica.

Propiedades de la solución viscosa (continuación)

Lema 2 Sea $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}} |u_0(x+y) - u_0(x)|\, dx \leq H(|y|) \quad \cdots (1)$$

$\forall y \in \mathbb{R}$, donde $H = H(r)$, $H : [0,\infty) \to \mathbb{R}^+$ es una función no negativa, no creciente de $r \in [0,\infty)$, tal que

$$H(r) \to 0^+ \quad \text{si} \quad r \to 0^+.$$

Asimismo, si para cada $\varepsilon > 0$ u^ε denota la solución al problema de Cauchy viscoso con condición inicial $u^\varepsilon(\cdot,0) = u_0(\cdot)$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}} |u^\varepsilon(x+y,t) - u^\varepsilon(x,t)|\, dx \leq H(|y|) \quad \cdots (2)$$

$\forall y \in \mathbb{R}$, $\forall t \geq 0$ fijo.

Demostración Para cada $y \in \mathbb{R}$, fijo,

$$\int_{\mathbb{R}} |u_0(x+y) - u_0(x)|\, dx \leq 2\, \|u_0\|_{L^1},$$

de modo que $\forall r \geq 0$

$$H(r) := \sup_{|y| \leq r} \int_{\mathbb{R}} |u_0(x+y) - u_0(x)|\, dx$$

está bien definida. Además $H(r) \geq 0$.

Más aún, si $r_1 \leq r_2$ entonces $Ⓗ(r_1) \leq Ⓗ(r_2)$ (no creciente). Dado que $Ⓗ(0) = 0$ concluimos que $Ⓗ(r) \to 0$ si $r \to 0^+$.
Esto implica que

$$\int_{\mathbb{R}} |u_0(x+y) - u_0(x)|\, dx \leq Ⓗ(|y|)$$

$\forall y \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ (1).

Sea $t>0$ fijo. Para cada $y \in \mathbb{R}$ fijo definimos

$$\bar{u}(x,t) := u^{\varepsilon}(x+y,t)$$

c.d.s. en $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$

$\therefore$ $\bar{u}$ es solución de la ecuación viscosa con condición inicial $\bar{u}(x,0) = u^{\varepsilon}(x+y,0)$ $= u_0(x+y)$.

Por el lema 1 (i):

$$\int_{\mathbb{R}} |u^{\varepsilon}(x+y,t) - u^{\varepsilon}(x,t)|\, dx = \|\bar{u}(\cdot,t) - u^{\varepsilon}(\cdot,t)\|_{L^1}$$

$$\leq \|\bar{u}(\cdot,0) - u^{\varepsilon}(\cdot,0)\|_{L^1}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |u_0(x+y) - u_0(x)|\, dx$$

$$\underset{(1)}{\leq} Ⓗ(|y|)$$

$\forall y \in \mathbb{R}$, $\forall t>0$

$\Rightarrow$ (2) $\square$

Teorema de unicidad de Kruzkov

$u \in L^\infty$ solución entrópica $\iff$ $u \in L^\infty$ entrópica en sentido de Kruzkov:

$u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty); [a,b])$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ compacto, es solución entrópica del problema de Cauchy si $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}_+ = C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; [0,\infty))$ y $\forall\, k \in [a,b]$ se cumple

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi_t |u-k| + \varphi_x \operatorname{sgn}(u-k)(f(u)-f(k))\, dx\, dt + $$
$$+ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x;0)\,|u_0(x)-k|\, dx \geq 0 \qquad \ldots (3)$$

Teorema 4 (Kruzkov)

Sean $[a,b] \subset \mathbb{R}$ compacto, $f \in C^1([a,b]; \mathbb{R})$ y $u, \tilde{u} \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty); [a,b])$ dos soluciones entrópicas del problema de Cauchy con datos iniciales $u_0, \tilde{u}_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, respectivamente, que toman valores en $[a,b]$. Sea

$$N := \sup_{u \in [a,b]} |f'(u)| \qquad \ldots (4)$$

Entonces, para todo $R > 0$ y todo par $T > T_0 \geq 0$ se tiene

$$\int_{|x|\leq R} |u(x,\tau)-\bar{u}(x,\tau)|\,dx \leq \int_{|x|\leq R+N(\tau-\tau_0)} |u(x,\tau_0)-\bar{u}(x,\tau_0)|\,dx \quad \ldots (5)$$

Asimismo, $\forall t\geq 0$, $\forall R>0$,

$$\|u(\cdot,t)-\bar{u}(\cdot,t)\|_{L^1(B_R(0))} \leq \|u_0-\bar{u}_0\|_{L^1(B_{R+Nt}(0))}$$

Demostración: Ver Notas

$\square$

Consecuencias:

<u>Corolario 1</u> (unicidad) Existe, a lo más, una solución entrópica al problema de Cauchy.

<u>Corolario 2</u> (velocidad finita de propagación)

El valor de la solución entrópica en cualquier punto $(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)$ depende únicamente de la restricción de los datos iniciales en la bola $B_{Nt}(x)$.

<u>Esbozo de demostración del teorema principal (T1)</u>

Sea u^ε la solución al problema viscoso con condición inicial $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ y $\forall \varepsilon > 0$. Por los teoremas 2,3 y el lema 2, la familia $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es uniformemente acotada y equicontinua en cualquier subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R} \times (0,\infty)$. Por el teorema de Arzelá-Ascoli existe una subsucesión $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ tal que

$u^\varepsilon \to u$ en L^1 en compactos de $\mathbb{R}$ cuando $\varepsilon \to 0^+$.

$\Rightarrow \quad u^\varepsilon \to u$ en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $\forall t > 0$

u es acotada (principio del máximo)

$\therefore \quad u \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Por el teorema 1, u es una solución entrópica del problema de Cauchy.

Para extender al caso general $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ se define $\forall \rho > 0$:

$$\chi_{B_\rho(0)}(x)\, u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$$

Se puede demostrar que:

- $\chi_{B_\rho} u_0 \to u_0$ en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ cuando $\rho \to \infty$.

- Si u_ϱ es la solución entrópica al problema de Cauchy construida arriba con condición inicial $\chi_{B_\varrho} u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ $\forall \varrho > 0$ entonces:

  (a) $u := \lim_{\varrho \to \infty} u_\varrho \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$

  (b) u es solución entrópica del problema de Cauchy con condición inicial $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$

Para probar (b) se aplica la estimación (5) del teorema de Kruzkov.

$\therefore \exists$ solución entrópica.

Por el teorema de Kruzkov, esta solución es la única solución entrópica

$\square$