Lección 2.15 : Teoría de Kruzkov-Oleinik: aproximación viscosa.

Teoría de Kruzkov-Oleinik

Objetivo: demostrar existencia y unicidad al problema de Cauchy con función de flujo $f \in C^2(\mathbb{R})$ (caso general) y con condición inicial $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Estrategia:

(i) Método de aproximación viscosa: $\exists!$ solución u^ε al problema viscoso asociado, $\forall \varepsilon > 0$ y se demuestra la convergencia cuando $\varepsilon \to 0^+$ a una solución débil y entrópica. O. Oleinik (1959), lo probó para el caso convexo.

(ii) Unicidad: método de Kruzkov (1970) con la condición de entropía y con el par de Kruzkov se prueba la unicidad.

Combinando (i) y (ii): $\exists!$ de la solución entrópica.

Referencia: Godlewski, Raviart, "Hyperbolic systems of CL", Vol. 3-4, Ellipses, 1991.

Problema de Cauchy, ley de conservación escalar en una dimensión espacial:

$$\left.\begin{array}{lll} u_t + f(u)_x = 0, & & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & & x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} (1)$$

$f \in C^2(\mathbb{R})$, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ (acotada)

Teorema final (Kruzkov-Oleinik)

Sea $f \in C^2(\mathbb{R})$. Entonces para cada $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ existe una única solución entrópica $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ al problema de Cauchy (1).

Problema viscoso: $\forall\ \varepsilon > 0$

$$\left.\begin{array}{lll} u^\varepsilon_t + f(u^\varepsilon)_x = \varepsilon u^\varepsilon_{xx}, & & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u^\varepsilon(x,0) = u_0(x), & & x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} (2)$$

Nota: (1) y (2) tienen la misma condición inicial u_0.

La demostración tiene varias componentes:

Teorema 1 Sea (E, Ψ) un par de entropía de clase C^1 de la ley de conservación en (1), con $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente convexa. Supongamos que $\forall \varepsilon > 0$ existe una solución suave u^ε al problema viscoso (2) que satisface

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C \quad \cdots (3)$$

$\forall \varepsilon > 0$ con $C > 0$ uniforme, y además

$$u^\varepsilon \to u \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0^+ \text{ c.d.s.} \quad \cdots (4)$$
$$\text{en } (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

para cierta $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$. Entonces u es una solución débil de (1) que satisface la condición de entropía

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left[\varphi_t E(u) + \varphi_x \Psi(u) \right] dx\, dt \; + $$
$$+ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,0) E(u_0(x))\, dx \geq 0 \quad \cdots (5)$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_+ = \{ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) : \varphi \geq 0 \}$$

Caso particular del teorema de la Sección 1 para sistemas (lección 1.15).

Teorema 2 una función $u \in L^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty); [a,b])$, con $[a,b]\subset\mathbb{R}$ compacto, es solución entrópica de (1) si y sólo si

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\left[\varphi_t|u-k| + \varphi_x \operatorname{sgn}(u-k)(f(u)-f(k))\right]dx\,dt + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,0)|u_0(x)-k|\,dx \geq 0 \quad \cdots (6)$$

$\forall k\in[a,b]$, $\forall \varphi\in \mathcal{D}_+$.

Este teorema se probó en la sección 2 (lección 2.3).

Nota: requerir $\mathcal{U}=[a,b]$ compacto no representa pérdida de generalidad por la velocidad finita de propagación.

Se definen:

$$\left.\begin{aligned} 0 < M_0 &:= \|u_0\|_{L^\infty} < \infty \\ 0 < N &:= \max_{u\in[-M_0,M_0]} |f'(u)| \end{aligned}\right\} \cdots (7)$$

El siguiente teorema garantiza la $\exists!$ de la solución del problema viscoso (2):

Teorema 3 (Oleinik: $\exists!$ solución viscosa)

Sean $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, $M_0 = \|u_0\|_{L^\infty} > 0$, y $f \in C^1([-M_0, M_0])$. Entonces el problema de Cauchy viscoso (2), para cualquier $\varepsilon > 0$, tiene una única solución

$$u^\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty)) \cap C^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$$

que satisface

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq M_0 \qquad \cdots (8)$$

uniformemente en $\varepsilon > 0$ y en $t > 0$.
Además,

$$u^\varepsilon(\cdot,t) \in L^p(\mathbb{R}), \qquad \forall\, 1 \leq p < \infty$$

para cada $t > 0$ fijo, $\forall \varepsilon > 0$, y

$$u^\varepsilon(x,t) \to u_0(x) \qquad \text{c.d.s. en } x \in \mathbb{R}$$

cuando $t \to 0^+$, $\forall\, \varepsilon > 0$.

Ref. Taylor "PDEs Vol. III: Nonlinear equations", Springer (1996), Proposition 1.5 (Chp 15), pág. 276.

Esbozo de la demostración

Problema de Cauchy, ecuación del calor:

$$\left.\begin{aligned} u_t &= \varepsilon u_{xx} \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}\right\} \cdots (9)$$

Para $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ la solución de (9) es

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|^2/4t} u_0(y)\, dy$$

y $u \in C^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty)) \cap L^\infty(\mathbb{R}\times[0,\infty))$, por regularidad del núcleo del calor.

Análogamente, el problema de Cauchy no homogéneo:

$$\left.\begin{aligned} u_t &= \varepsilon u_{xx} + g, \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}\right\} \cdots (10)$$

con $g = g(x,t) \in C^1(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ tiene como solución (variación de parámetros)

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|^2/4t} u_0(y)\, dy + $$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} e^{-|x-y|^2/4(t-s)} g(y,s)\, dy\, ds$$

$\in C^1(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ ya que $g \in C^1$.

Es posible demostrar que $u \in C^\infty$ mediante iteraciones (ver Taylor, vol. III, prop. 1.15, pág. 274):

Proposición Si $g \in C^1(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ entonces la solución de (10) está en $C^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C([0,\infty); L^2(\mathbb{R}))$

(ver. Taylor, Prop. 1.2).

Consecuencia:

Lema Si $\varepsilon > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ son constantes y $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ entonces una única solución

$$u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C([0,\infty); L^2(\mathbb{R}))$$

al problema

$$\left.\begin{aligned} u_t + \lambda u &= \varepsilon u_{xx} + g \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Dem. El cambio $w = ue^{\lambda t}$ transforma (11) al problema (10) con $\tilde{g}(x,t) = e^{-\lambda t} g(x,t) \in C^1$

$\square$

$f \in C^1([-M_0, M_0])$. Definimos

$f \equiv$ constante para $|u| \geq M_0$.

Tomamos $\quad v := u e^{-\lambda t}$

y sustituyendo en la ecuación viscosa de (2):

$$\left.\begin{aligned} v_t + \lambda v &= \varepsilon v_{xx} - e^{-\lambda t} f(e^{\lambda t} v)_x \\ v(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Tomemos $v \in C([0,\infty); L^2(\mathbb{R})) \cap C^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ fijo. Entonces por el lema el problema de Cauchy

$$\left.\begin{aligned} w_t + \lambda w &= \varepsilon w_{xx} + \tilde{g}_v(x,t) \\ w(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

con $\tilde{g}_v(x,t) := -e^{-\lambda t} f(e^{\lambda t} v) \in C^1$ tiene una única solución

$$w \in C([0,\infty); L^2(\mathbb{R})) \cap C^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$$

para cada v.

Sea el mapeo $\begin{cases} T_\lambda : X \to X \\ T_\lambda v := w \end{cases}$

con $\quad \mathbb{X} = C([0,\infty); L^2(\mathbb{R}))$ Banach.

Para $\lambda > 0$ suficientemente grande T_λ es una contracción, en $\mathbb{X}$.

$\Rightarrow \qquad \exists! \ v \in \mathbb{X}, \quad T_\lambda v = v$

Pto. fijo de Banach

$$v \in C([0,\infty); L^2(\mathbb{R}))$$

Que $v \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ se sigue de la teoría de regularidad parabólica (regularidad de v como solución de (13)).

Que $v \in L^\infty$ con $\|v\|_{L^\infty} \leq M_0$ se sigue del principio del máximo.

$\square$