Lección 2.14 : Problema de Riemann: caso general (continuación).

Teorema (problema de Riemann: caso general)

Sean $f \in C^2(\mathbb{R})$ y $u_L \neq u_R$, constantes. Entonces la única solución entrópica al problema de Riemann

$$u_t + f(u)_x = 0 \qquad \cdots \quad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L, & x<0 \\ u_R, & x>0 \end{cases} \qquad \cdots \quad (2)$$

está representada, a lo más, por un conjunto <u>numerable</u> de discontinuidades que satisfacen la condición de entropía generalizada (ondas de choque) y ondas de rarefacción que satisfacen (1) en sentido de distribuciones.

<u>Demostración</u>: Dado que $u_L \neq u_R$, la condición inicial es monótona $\therefore$ esperamos que la solución sea monótona en la variable espacial (Oleinik). Supongamos que $u = u(x,t)$ es solución y que $\xi \mapsto v(\xi) := u(\xi, 1)$ es monótona con un conjunto numerable de discontinuidades. Definimos

$$I(u_L,u_R) := \begin{cases} (u_L,u_R), & u_L < u_R \\ (u_R, u_L), & u_L > u_R \end{cases}$$

$$\chi(u) := \begin{cases} \infty, & u \notin I(u_L, u_R) \\ 0, & u \in I(u_L, u_R) \end{cases}$$

χ es una distribución.

Tenemos dos casos : (a) $u_L < u_R$
(b) $u_L > u_R$

En el caso (a) definimos la envolvente convexa de f :

$$\begin{cases} h(u) := \sup\left\{ g(u) : \begin{array}{l} g \text{ convexa}, \\ g \leq f + \chi \end{array} \right\} \\ u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

h es convexa en $I[u_L, u_R] = [u_L, u_R]$
$\Rightarrow$ $h \in C^1$ c.d.s.

$\therefore$ podemos calcular $h'(u)$ excepto en un conjunto numerable de puntos

$$d(u) := h'(u) \quad \text{c.d.s. en } u \in [u_L, u_R]$$

Además, $d(u)$ es monótona creciente.

$\Rightarrow$ podemos definir $v(\xi)$ de manera única mediante

$$d(v(\xi)) = \xi, \qquad \forall \xi \in [d(u_L), d(u_R)]$$

excepto en un conjunto de medida cero.

Si $\xi < d(u_L)$ entonces $v(\xi) := u_L$.

Si $\xi > d(u_R)$ entonces $v(\xi) := u_R$

$$(3) \ldots \quad v(\xi) := \begin{cases} u_L, & \xi < d(u_L) \\ d^{-1}(\xi), & \xi \in [d(u_L), d(u_R)] \\ u_R, & \xi > d(u_R) \end{cases}$$

c.d.s. en $\xi \in \mathbb{R}$.

En el caso (b), $u_L > u_R$, definimos la envolvente cóncava

$$h(u) := \inf \left\{ g(u) : \begin{array}{l} g \text{ cóncava}, \\ f - \chi \leq g \end{array} \right\}$$

Aquí $d(u) = h'(u)$ es monótona decreciente en $[u_R, u_L]$, definida c.d.s. y podemos definir $v = v(\xi)$ c.d.s. con la misma fórmula (3)

Por demostrar: v definida en (3) satisface

$$(4) \ldots \quad \left\{ f(v(\xi))_\xi = \xi\, v'(\xi) \quad \text{c.d.s. } \xi \in \mathbb{R} \right.$$

en sentido distribucional.

$v = v(\xi)$ puede tener un conjunto numerable de saltos. En estos saltos se cumple la condición de entropía.

Lo probaremos para el caso (a), $u_L < u_R$ (caso (b) es análogo).

Para $\xi \in [d(u_L), d(u_R)]$ c.d.s. se tiene que

$$(5) \ldots \qquad f(v(\xi)) = h(v(\xi))$$

(excepto en los valores críticos de $v(\xi)$, discontinuidades, conjunto numerable).

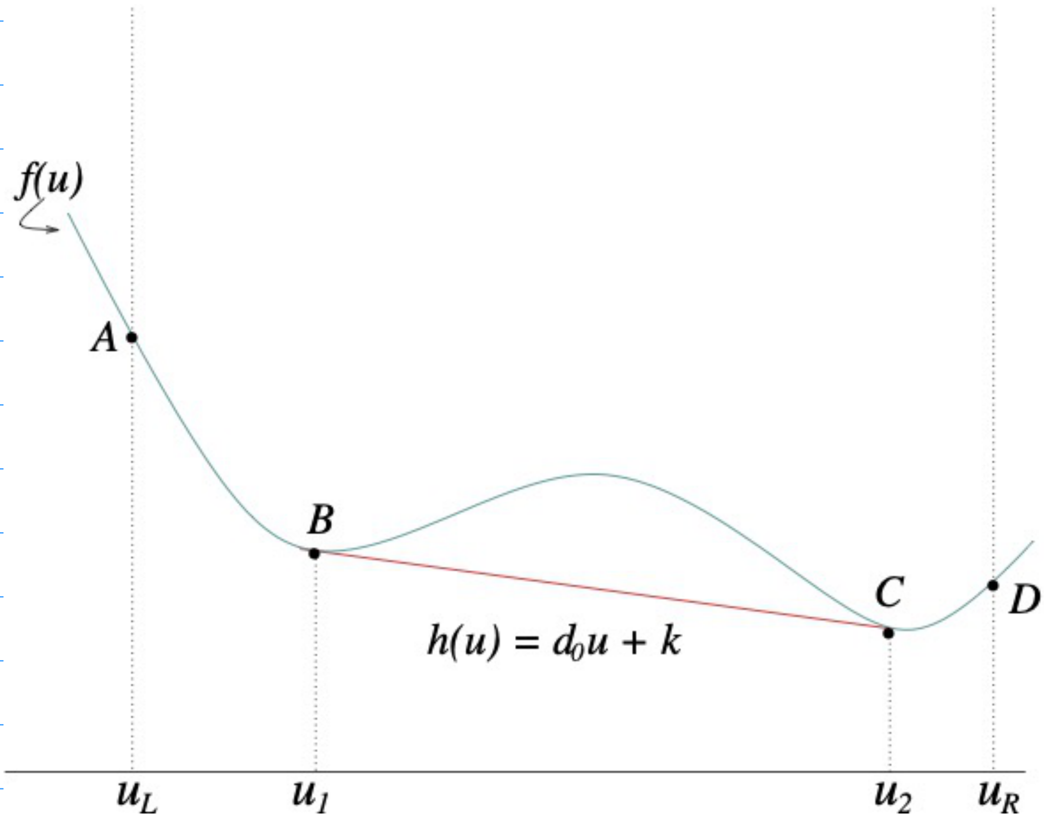

Fig I.

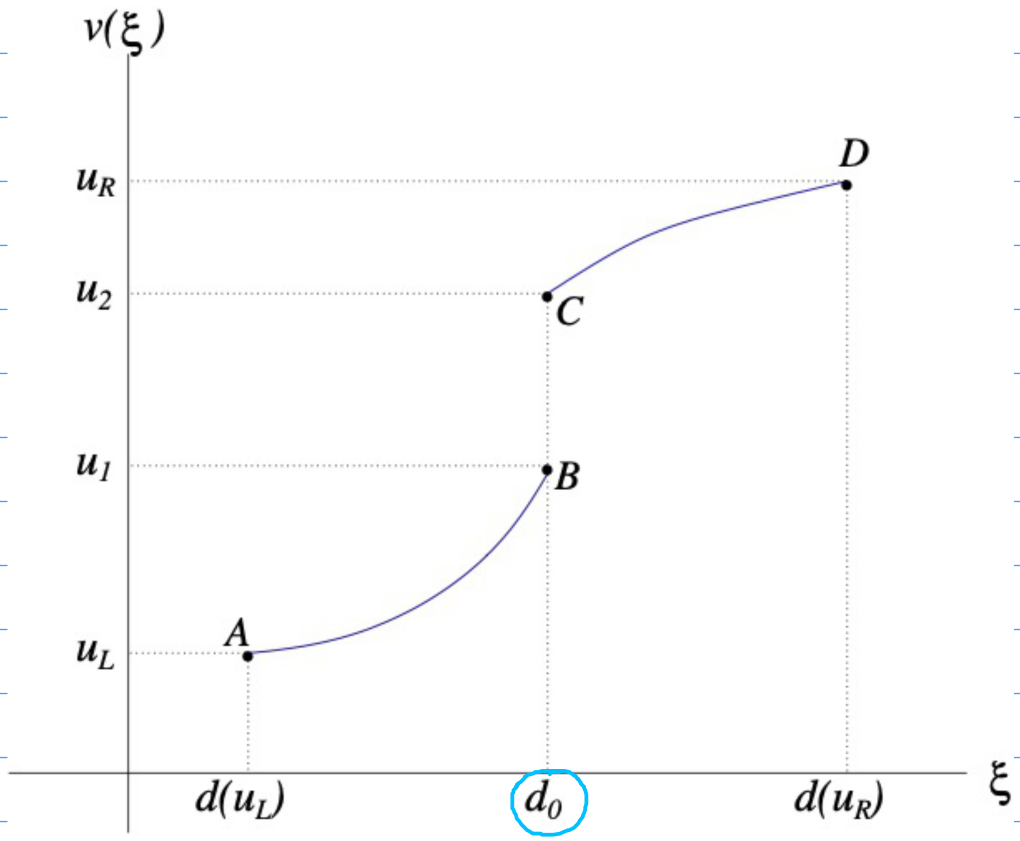

Fig. II

En Fig. I : envolvente convexa $h(u) \equiv f(u)$ en tramos AB, CD.
Tramo BC : $h(u) = d_0 u + k$.

En Fig. II : $v = v(\xi)$, $\xi \in [d(u_L), d(u_R)]$
En AB, CD, $f(v(\xi)) = h(v(\xi))$
excepto en un punto crítico $\xi = d_0$
con medida cero. $f(v(\xi)) = h(v(\xi))$
c.d.s. en ξ

Por otro lado, $\forall\, w \in [u_L, u_R]$ tenemos por definición de h y por convexidad :

$$f(w) \geq h(w) \geq h(v(\xi)) + h'(v(\xi))(w - v(\xi))$$

$$(6) \ldots \qquad = f(v(\xi)) + \xi\,(w - v(\xi))$$

$$h'(v(\xi)) = \underset{(5)}{d}(v(\xi)) = \xi \qquad \text{c.d.s. en } \xi \in \mathbb{R}.$$

El lado derecho es el hiperplano soporte de h. Escogiendo $w := v(\xi+\epsilon)$, $\epsilon \neq 0$. Dividimos entre $|\epsilon|$:

$$\frac{f(v(\xi+\epsilon)) - f(v(\xi))}{|\epsilon|} \geq \xi \, \frac{v(\xi+\epsilon) - v(\xi)}{|\epsilon|}$$

Tomando el límite cuando :

- $\epsilon \to 0^+$ tenemos $f(v(\xi))_\xi \geq \xi v'(\xi)$ c.d.s. en ξ
- $\epsilon \to 0^-$ " $f(v(\xi))_\xi \leq \xi v'(\xi)$ c.d.s. en ξ

obtenemos (4).

Entropía : Sea $u_L < k < u_R$. Por monotonicidad de v $\exists\ \xi_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$v(\xi) \leq k \quad \text{si} \quad \xi < \xi_0$$
$$v(\xi) \geq k \quad \text{si} \quad \xi > \xi_0$$

Por lo tanto, para cada $\epsilon > 0$

$$\operatorname{sgn}\left(v(\xi_0+\epsilon) - k\right) \geq 0$$

$$\operatorname{sgn}\left(v(\xi_0-\epsilon) - k\right) \leq 0$$

Sean $$v_R := \lim_{\epsilon\to 0^+} v(\xi_0+\epsilon)$$
$$v_L := \lim_{\epsilon\to 0^+} v(\xi_0-\epsilon)$$

Si $v_L = v_R$ entonces ξ_0 es un punto de continuidad de v y la desigualdad de entropía se satisface trivialmente en forma de igualdad.

Suponiendo $v_L \neq v_R$. Sustituyendo $w = k$, y $\xi = \xi_0 + \epsilon$ en (6):

$$0 \geq \left[f(v(\xi_0+\epsilon)) - f(k)\right]\operatorname{sgn}\left(v(\xi_0+\epsilon) - k\right)$$
$$- (\xi_0+\epsilon)\,|k - v(\xi_0+\epsilon)|$$

Tomando $\epsilon \to 0^+$:

$$\left(f(v_R) - f(k)\right)\operatorname{sgn}(v_R - k)$$

(7) .... $$\leq \xi_0\,|k - v_R|$$

Análogamente $w = k$, $\xi = \xi_0 - \epsilon$

$$\left(f(v_L) - f(k)\right) \operatorname{sgn}(v_L - k| \geq$$

(8) .... $\xi_0 |v_L - k|$

Restando (8) de (7) obtenemos Kruzkov.

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \xi_0 = d_0$$ (velocidad de la onda de choque)

En el caso $k \geq u_R$

$$f(v_L) - f(v_R) \leq \xi_0 (v_L - v_R) \quad \cdots (9)$$

Sustituyendo $w = v(\xi_0 + \epsilon)$, $\xi = \xi_0 - \epsilon$: en (6) :

$$f(v(\xi_0 + \epsilon)) \geq f(v(\xi_0 - \epsilon)) + \\ + (\xi_0 - \epsilon)\left(v(\xi_0 + \epsilon) - v(\xi_0 - \epsilon)\right)$$

Tomando lím cuando $\epsilon \to 0^+ \Rightarrow$ (9).

El caso $k < u_L$ es análogo.

$\therefore$ se cumple Kruzkov ($\Rightarrow$ entropía generalizada) para cada punto singular ξ_0 de $v(\xi)$

$\therefore$ solución de clase C^1 x pedazos y entrópica

$\left(\overset{\Rightarrow}{\text{contracción } L^1} \right.$ única en esa clase $\left. \right)$ $\square$