Lección 2.13 : Problema de Riemann: caso general.

Ley de conservación:

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

$f \in C^2(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Problema de Riemann:

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0 \end{cases} \quad \cdots (2)$$

con $u_L \neq u_R$, constantes.

Cambios en convexidad: ejemplo:

$$f(u) = \frac{1}{3}u^3 - u \quad \cdots \quad (3)$$

Pto. de inflexión único en $u = 0$.

Suponemos que

$$u_L < 0 < u_R.$$

$$a(u) = f'(u) = u^2 - 1$$

$$f''(u) = 2u$$

$\Rightarrow$ máximo en $u = -1$
mínimo en $u = 1$

Consecuencia : $\forall\ u \in [u_L, u_R]$, $u \neq 0$
$\exists!$ recta tangente a la gráfica de f en el punto $(\xi(u), f(\xi(u)))$, con $\xi(u) \neq u$
Si $u=0$ entonces se define $\xi(0) = 0$.

Sea $u \neq 0$, $u \in [u_L, u_R]$. Resolvemos

$$\frac{f(\xi(u)) - f(u)}{\xi(u) - u} = f'(\xi(u))$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}\left(2\xi^2 - \xi u - u^2\right) = 0, \quad \xi \neq u$$

$$\Rightarrow \quad \xi(u) = \frac{1}{4}u \pm \frac{3}{4}|u| .$$

$\xi \neq u$, si $u>0$ entonces $\xi = -\frac{1}{2}u$

si $u<0$ entonces $\xi = -\frac{1}{2}u$

$$\therefore \quad \xi(u) = \begin{cases} -\frac{1}{2}u, & u \in [u_L, u_R],\ u \neq 0 \\ 0, & u = 0 \end{cases}$$

$u\xi(u) \leq 0$, y definimos

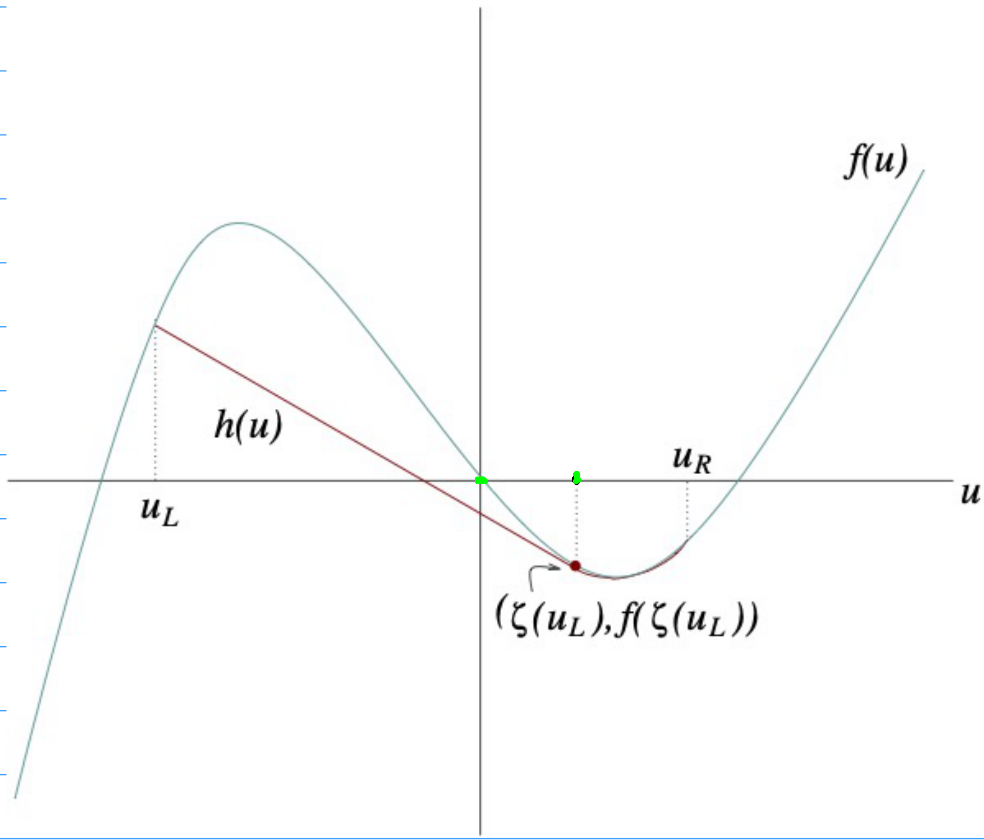
$$h : [u_L, u_R] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h(u) := \begin{cases} \underbrace{\left(\frac{f(u_L) - f(\xi(u_L))}{u_L - \xi(u_L)}\right)}_{m_L} u + f(u_L), & u \in [u_L, \xi(u_L)) \\ f(u), & u \in [\xi(u_L), u_R] \end{cases}$$

... (4)

h es continua y convexa.

$\therefore$ h es la envolvente convexa de f en $[u_L, u_R]$.



Tenemos 2 casos:

(i) $u_R \in (u_L, \zeta(u_L))$

(ii) $\zeta(u_L) < u_R$

(i) La solución de (1)-(2) es una onda de choque

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < st \\ u_R, & x > st \end{cases}$$

con $\quad s = \dfrac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} = \dfrac{1}{3}\left(u_L^2 + u_L u_R + u_R^2\right) - 1$

f está por encima de su cuerda en $[u_L, u_R]$.

caso interesante (ii):

h tiene una derivada continua c.d.s.

$$d(u) := h'(u) = \begin{cases} m_L, & u \in [u_L, \xi(u_L)] \\ u^2 - 1, & u \in (\xi(u_L), u_R] \end{cases}$$

con $\quad m_L = f'(\xi(u_L))$

$$= \frac{f(u_L) - f(\xi(u_L))}{u_L - \xi(u_L)}$$

$\forall \; u < \xi(u_L), \quad h'(u) = m_L$ const.

En $u \in (\xi(u_L), u_R]$, $d(u)$ es monótona creciente

Así, podemos definir $v = v(\xi)$, $\xi \in [d(\xi(u_L)), d(u_R)]$ mediante

(S) .... $\quad v(\xi) = d^{-1}(\xi), \quad \xi \in [d(\xi(u_L)), d(u_R)]$

Extensión $\quad v(\xi) := \begin{cases} u_R, & \text{si } \xi > d(u_R) \\ u_L, & \text{si } \xi < d(\underbrace{\varphi(u_L)}) \end{cases}$

Definimos la siguiente función auto-similar :

$$(7) \cdots u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < t\, d(\varphi(u_L)) \\ d^{-1}\left(\frac{x}{t}\right), & t\, d(\varphi(u_L)) < x < t\, d(u_R) \\ u_R, & x \geq t\, d(u_R) \end{cases}$$

Observamos que :

- $\lim\limits_{\xi \to d(u_R)} d^{-1}(\xi) = u_R$

- $\lim\limits_{\xi \to d(\varphi(u_L))} d^{-1}(\xi) = \varphi(u_L) \neq u_L$

$\Rightarrow$ la solución (7) no es continua

discontinuidad en $x = t\, d(\varphi(u_L))$

Rankine-Hugoniot :

$\tilde{u}_R = \varphi(u_L), \quad \tilde{u}_L = u_L.$

$$\therefore \frac{f(\tilde{u}_R) - f(\tilde{u}_L)}{\tilde{u}_R - \tilde{u}_L} = \frac{f(\varphi(u_L)) - f(u_L)}{\varphi(u_L) - u_L} = f'(\varphi(u_L)) = m_L$$

$$= d(\varphi(u_L))$$

$\therefore$ es la pendiente de la cuerda.

$\therefore$ satisface RH.

Entropía: Notamos que h y f coinciden en el tramo $[\varphi(u_L), u_R]$.

Así $\forall \xi \in [d(\varphi(u_L)), d(u_R)] = [f'(\varphi(u_L)), f'(u_R)]$

la función $v(\xi)$ se define como

$$d(v(\xi)) = f'(v(\xi)) = \xi$$

$$\Rightarrow \quad f(v(\xi))_\xi = \xi\, v'(\xi)$$

$\therefore$ en ese tramo tenemos una onda de rarefacción.

Finalmente, en $[u_L, \varphi(u_L)]$ la gráfica de f está localizada por encima de su cuerda y $\varphi(u_L) = \tilde{u}_R > u_L$.

$\Rightarrow$ la discontinuidad satisface la condición de entropía generalizada.

$\therefore$ (7) es una solución entrópica.

Ejemplo: $f(u) = \frac{1}{3}u^3 - u$

$u_L := -\sqrt{2} < 0 < u_R = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad \mathfrak{z}(u_L) = -\frac{1}{2}u_L = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f'(u_L) = u_L^2 - 1 = 1$

$d(\mathfrak{z}(u_L)) = f'(\mathfrak{z}(u_L)) = -\frac{1}{2}$

$d(u_R) = f'(u_R) = 1$

Onda de choque: $s = m_L = f'(\mathfrak{z}(u_L)) = -\frac{1}{2}$

$d(u) = f'(u) = u^2 - 1$ en $u \in [\mathfrak{z}(u_L), u_R]$

$= [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}]$

$\therefore \quad d^{-1}(\xi) = \sqrt{\xi + 1}, \quad \xi \in [d(\mathfrak{z}(u_L)), d(u_R)]$

$= [-\frac{1}{2}, 1]$

La solución es:

$$u(x,t) = \begin{cases} -\sqrt{2}, & x < -\frac{1}{2}t \\ \sqrt{1 + \frac{x}{t}}, & -\frac{1}{2}t < x < t \\ \sqrt{2}, & x \geq t \end{cases}$$

es solución entrópica de (1) y (2)

ex $f(u) = \frac{1}{3}u^3 - u$

$$u(x,0) = \begin{cases} -\sqrt{2}, & x<0 \\ \sqrt{2}, & x>0 \end{cases}$$