Lección 2.12 : Soluciones autosimilares. Problema de Riemann: caso convexo.

Ley de conservación:

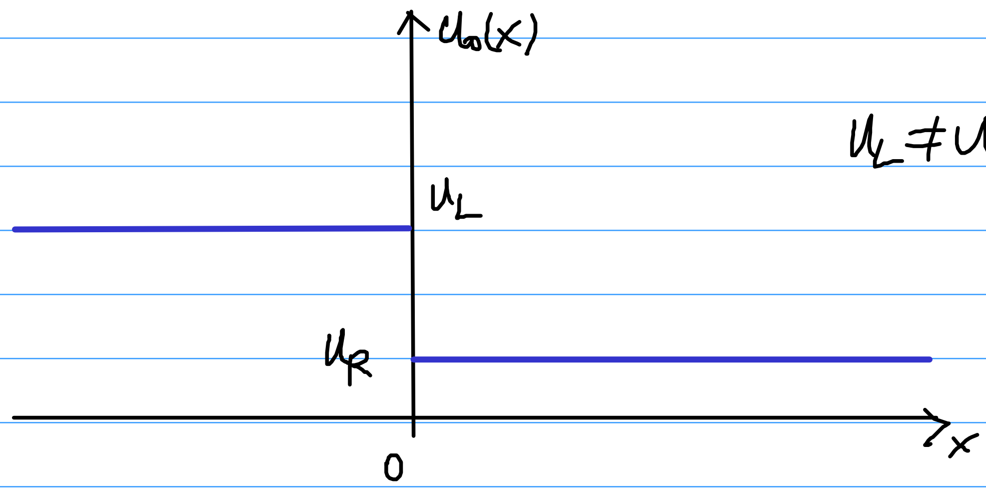
$$u_t + f(u)_x = 0 \qquad \ldots \quad (1)$$

$x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u \in \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R})$.

Problema de Riemann: resolver (1) con dato inicial

$$(2) \ldots \quad u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0 \end{cases}$$

donde $u_L \neq u_R$, $u_L, u_R \in \mathbb{R}$ constantes.



<u>Soluciones autosimilares</u>

Sea $u \in L^\infty(\mathbb{R})$ una solución entrópica del problema de Riemann (1), (2).

Entonces:

$$u^{\alpha}(x,t) := u(\alpha x, \alpha t),$$

con $\alpha > 0$, es también solución entrópica del problema de Riemann:

- $u^{\alpha}(x,0) = u(\alpha x, 0) = u_0(x)$
- u solución débil $\Rightarrow$ u^{α} solución débil

  (ejercicio)
- u satisface condición de entropía generalizada sobre Σ discontinuidad $\Rightarrow$ u^{α} también sobre $\tilde{\Sigma}$.

  (ejercicio)

Por unicidad de la solución entrópica tenemos que $u \equiv u^{\alpha}$ $\forall\, \alpha > 0$.

Escogiendo $\alpha = \frac{1}{t}$ (para $t > 0$ fijo, pero arbitrario):

$$u(x,t) = u^{(1/t)}(x,t) = u\left(\frac{x}{t}, 1\right)$$

$\Rightarrow$ u es una solución autosimilar

$$u(x,t) = v\left(\frac{x}{t}\right).$$

Supongamos que $v \in C^1$, $v = v(\xi)$, $\xi := \frac{x}{t}$. Sustituyendo

$$u_t + f(u)_x = -\frac{\xi}{t} v'(\xi) + \frac{1}{t} f(v(\xi))_\xi$$
$$= 0$$

obtenemos el "sistema":

$$(3) \cdots \begin{cases} f(v(\xi))_\xi = \xi v'(\xi) \\ \\ v(-\infty) = u_L \\ v(\infty) = u_R \end{cases}$$

Si $v \notin C^1$, (3) se satisface en sentido de distribuciones.

Si $v \in C^1$ entonces

$$\frac{d}{d\xi} f(v(\xi)) = f'(v(\xi)) v'(\xi)$$
$$= a(v(\xi)) v'(\xi)$$
$$\underset{(3)}{=} \xi v'(\xi)$$

Nota: esta ecuación se cumple siempre que

$$a(v(\xi)) = \xi. \quad \cdots \quad (4)$$

Ejemplo : si $f'' \geq \delta > 0$ (caso convexo) esto es equivalente a

$$v(\xi) = g(\xi)$$

donde $g = a^{-1}$.

Por hiperbolicidad (velocidad finita de propagación), sea

$$M := \max_{u \in I[u_L, u_R]} |a(u)| < \infty$$

$$I[u_L, u_R] = \begin{cases} [u_L, u_R], & u_R > u_L \\ [u_R, u_L], & u_L > u_R \end{cases}$$

entonces la solución $u(x,t) = v\left(\frac{x}{t}\right)$ donde v es solución distribucional de (4) satisface

$$u = \begin{cases} u_L, & \text{si} \quad x < -Mt \\ u_R, & \text{si} \quad x > Mt \end{cases}$$

Esto motiva la siguiente :

Definición Una onda de rarefacción centrada en $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ dada es una solución autosimilar de la forma

$$u(x,t) = v\left(\frac{x - x_0}{t - t_0}\right) \qquad \cdots (5)$$

definida en el sector

$$-M(t - t_0) < x - x_0 < M(t - t_0)$$

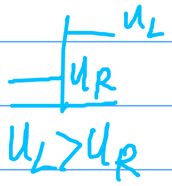
para todo $t > t_0$, y donde $v \in C^1$ que satisface

$$a(v(\xi)) = \xi, \qquad \xi \in [-M, M]$$

Solución al problema de Riemann: caso convexo.

Teorema (problema de Riemann: caso convexo).

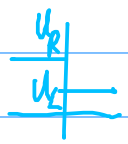
Sea $f \in C^2(\mathbb{R})$, estrictamente convexa, $f''(u) \geq \delta > 0$ $\forall\, u \in \mathbb{R}$. Entonces:



(i) Si $u_L > u_R$ entonces la única solución entrópica al problema de Riemann (1)-(2) es la onda de **choque**:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < st \\ u_R, & x > st \end{cases} \quad \cdots (6)$$

donde $\quad s = \dfrac{[f(u)]}{[u]} \quad ; \quad \forall\, (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$



$u_R > u_L$

(ii) Si $u_R > u_L$ entonces la única solución al problema de Riemann es la onda de rarefacción (centrada en $(0,0)$):

$$(7) \cdots \quad u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < a(u_L)t \\ g\left(\frac{x}{t}\right), & a(u_L)t \le x \le a(u_R)t \\ u_R, & x > a(u_R)t \end{cases}$$

para $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$, donde $g = a^{-1}$.

Demostración: (i) $u_L > u_R$. Claramente la onda de choque (6) es una solución débil y entrópica (Lax $\Leftrightarrow$ $u_L > u_R$) del problema de Riemann. Debe coincidir con la fórmula de Lax-Hopf con

$$u_0(x) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0. \end{cases}$$

(ii) $u_R > u_L$. En la región

$$a(u_L) < \frac{x}{t} < a(u_R)$$

la solución satisface la ecuación:

$$u_t + f(u)_x = -g'\left(\frac{x}{t}\right)\frac{x}{t^2} + a\left(g\left(\frac{x}{t}\right)\right)g'\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t}$$
$$= 0$$

ya que $a^{-1} = g$. En las otras regiones $u \equiv u_L$, $u \equiv u_R$, tambien es solución.

$\therefore$ u es solución C^1 c.d.s.

Es solución débil (ejercicio).

Dado que g es Lipschitz:

$$u(x+\varepsilon, t) - u(x,t) = g\left(\frac{x+\varepsilon}{t}\right) - g\left(\frac{x}{t}\right)$$
$$\leq \frac{C\varepsilon}{t}$$

para $a(u_L)t < x < a(u_R)t$.

$\therefore$ u satisface la condición de Oleinik

$\therefore$ u es sol. débil, entrópica $\Rightarrow$ coincide con la fórmula de Lax-Hopf

$\square$

Observación: si $f''(u) \leq -\delta < 0$ $\forall u \in \mathbb{R}$ (caso estrictamente cóncavo)

La solución al problema de Riemann:

(i) $u_L > u_R \Rightarrow$ onda de rarefacción

(ii) $u_R > u_L \Rightarrow$ onda de choque.