Lección 2.11 : Comportamiento asintótico de la solución de Lax-Hopf en la norma $L^\infty$

$f \in C^2(\mathbb{R})$, $f''(u) \geq \delta > 0$, $f(0) = 0$, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$

Problema de Cauchy :

$$(1) \cdots \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Adicionalmente requerimos :

$$(2) \cdots \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\, dx < \infty$$

Lema (comportamiento de la norma $L^\infty$)

Existe una constante uniforme $C > 0$ tal que la solución entrópica de (1) (Lax-Hopf) satisface

$$\| u(\cdot, t) \|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \quad \cdots (3)$$

$\forall\ t > 0$.

Demostración

Sea $a_0 := a(0) = f'(0)$. $g = a^{-1}$

$a(u) = f'(u)$. $\Rightarrow \begin{cases} g(a_0) = 0 \\ f^*(a_0) = a_0 \underbrace{g(a_0)}_{0} - f(\underbrace{g(a_0)}_{0}) \\ \quad = 0 \end{cases}$

Taylor :

$$t f^*\left(\frac{x-y}{t}\right) = t f^*\left(\frac{x-y-a_0 t}{t} + a_0\right)$$

$$= t\left[\underbrace{f^*(a_0)}_{=0} + \underbrace{(f^*)'(a_0)}_{=0}\left(\frac{x-y-a_0 t}{t}\right) + \theta\left(\frac{x-y-a_0 t}{t}\right)^2\right]$$

para cierto $\theta > 0$ $\left((f^*)'' > 0\right)$

Por (2) ($u_0$ integrable):

$$\left|\int_0^y u_0(x)\,dx\right| \leq \|u_0\|_{L^1} =: M$$

Por lo tanto,

$$G(x,t,y) = \int_0^y u_0(x)\,dx + t f^*\left(\frac{x-y}{t}\right)$$

$$\geq -M + \frac{\theta}{t}|x-y-a_0 t|^2$$

ya que también $(f^*)'(a_0) = g(a_0) = 0$.

Por otra parte:

$$G(x,t,x-a_0 t) = t\overbrace{f^*(a_0)}^{=0} + \int_0^{x-a_0 t} u_0(\xi)\,d\xi$$

$$\leq M$$

y en el mínimo $y = \hat{y}(x,t)$ de $G(x,t,y)$

tenemos

$$M \geq G(x,t,x-a_0t) \geq G(x,t,\hat{y}(x,t))$$

$$\geq -M + \frac{\theta}{t}\left|x-\hat{y}(x,t)-a_0t\right|^2$$

$$\Rightarrow \quad \left|x-\hat{y}(x,t)-a_0t\right| \leq \sqrt{\frac{2M}{\theta}}\sqrt{t}$$

$\therefore$ existe $C>0$ uniforme tal que

$$\frac{\left|x-\hat{y}(x,t)-a_0t\right|}{t} \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \quad \cdots\cdots (4)$$

Finalmente, como $g$ es Lipschitz y $g(a_0)=0$, para cada $(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)$ c.d.s. obtenemos

$$|u(x,t)| = \left|g\left(\frac{x-\hat{y}(x,t)}{t}\right)\right|$$

$$= \left|g\left(\frac{x-\hat{y}(x,t)}{t}-a_0+a_0\right) - \overbrace{g(a_0)}^{=0}\right|$$

$$\leq \bar{C}\left|\frac{x-\hat{y}(x,t)}{t}-a_0\right| \leq \frac{\bar{C}C}{\sqrt{t}}$$

$\square$

Observaciones

(a) $\|u(x,t)\|_{L^\infty} = O(t^{-1/2})$ cuando $t \to \infty$

(b) Supongamos que $u_0$ tiene soporte compacto

$$\overline{\text{supp}\, u_0} \subset [-R, R], \quad R>0$$

En este caso la antiderivada

$$U_0(y) := \int_0^y u_0(x)\, dx$$

es constante cuando $|y| \geq R$

Así, de acuerdo con (4) el valor de $y = \hat{y}(x,t)$ que minimiza a $G$ para $(x,t)$ fijo está localizado en el intervalo

$$x - a_0 t - C\sqrt{t} \leq y \leq x - a_0 + C\sqrt{t}$$

Si $x < a_0 t - C\sqrt{t} - R$ entonces $\hat{y}(x,t) < -R$ donde el valor de $U_0(y)$ es constante en $y$

$\therefore$ el mínimo de $G(x,t,y)$ se alcanza en el mínimo de $t\, f^*\left(\frac{x-y}{t}\right)$

que es precisamente $\hat{y}(x,t) = x - a_0 t$ ya que $g(a_0) = 0$.

Analogamente, si $x > a_0 t + C\sqrt{t} + R$ entonces el mínimo $\hat{y}(x,t)$ es $x - a_0 t$.

Concluimos que $u(x,t) = 0$ si

$$|x - a_0 t| > C\sqrt{t} + R$$

$\therefore$ cada solución, cuyo dato inicial tiene soporte compacto, es a tiempo $t > 0$, cero fuera de un intervalo de longitud de orden $O(\sqrt{t})$, y dentro la $\|u\|_\infty$ es de orden $O(1/\sqrt{t})$.

Hipótesis adicional:

(5) .- $u_0$ tiene soporte compacto $\subset [-R, R]$.

Definimos:

$$(6) \begin{cases} d := f''(0) > 0 \\ p := -2 \min\limits_{y \in \mathbb{R}} \displaystyle\int_{-\infty}^{y} u_0(x)\,dx \geq 0 \\ q := 2 \max\limits_{y \in \mathbb{R}} \displaystyle\int_{y}^{\infty} u_0(x)\,dx \geq 0 \end{cases}$$

$u_0$ sop. compacto $\Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{y} u_0(x)\,dx \geq -\int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|\,dx$$
$$> -\infty$$

$$\therefore \quad -\infty < \inf_{y\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{y} u_0(x)\,dx \leq 0$$

ya que para $\tilde{y}<0$ con $|\tilde{y}|\gg 1$ ($(-\infty,\tilde{y})$ fuera del soporte de $u_0$)

$$\int_{-\infty}^{\tilde{y}} u_0(x)\,dx = 0.$$

$\Rightarrow$ el mínimo es no positivo

$\therefore \quad p \geq 0.$

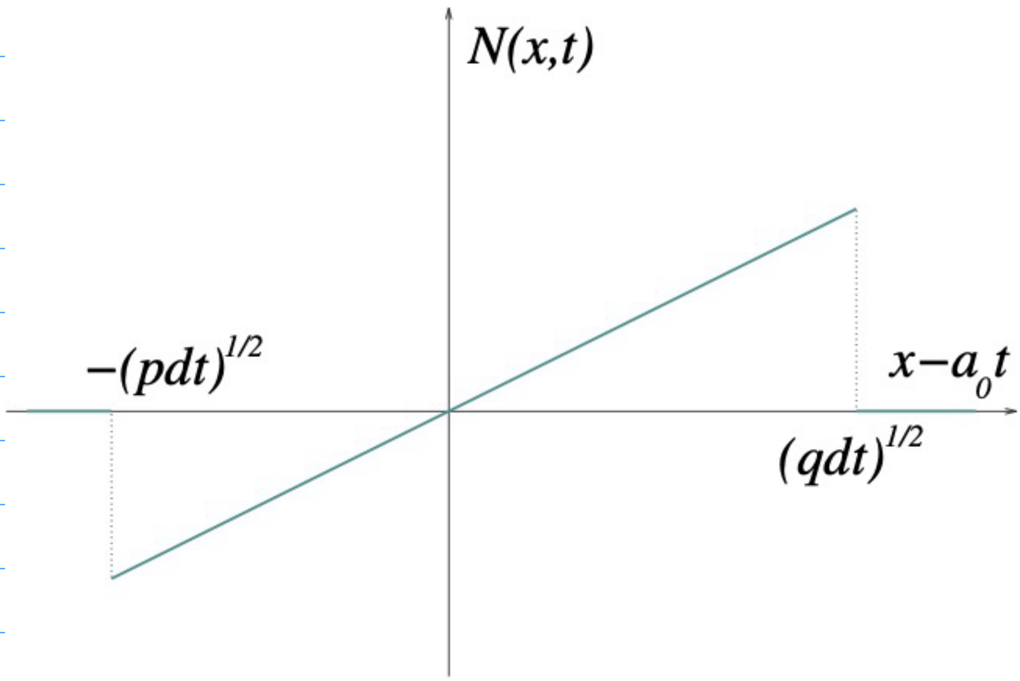
Análogamente, $q \geq 0$.

Finalmente:

$$g'(d_0) = \frac{1}{f''(0)} = \frac{1}{d} > 0.$$

<u>Definición</u> (onda N) Dados los parámetros $p,q\geq 0$, $d>0$, $a_0\in\mathbb{R}$ se define

$$N(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{d}\left(\frac{x}{t} - a_0\right), & -\sqrt{pdt} < x - a_0 t < \sqrt{qdt} \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

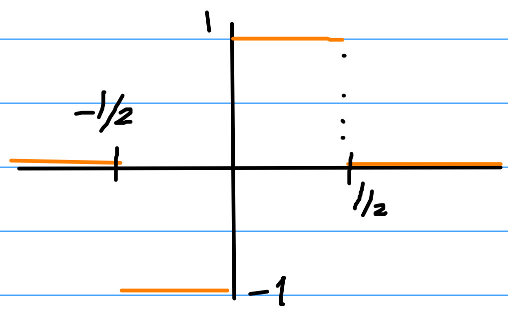



N invertida ⇓ "onda N"

Ejemplo: Burgers $f(u) = \frac{1}{2}u^2$.

$$u_t + \left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x = 0$$

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} -1, & -1/2 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

$=$ 

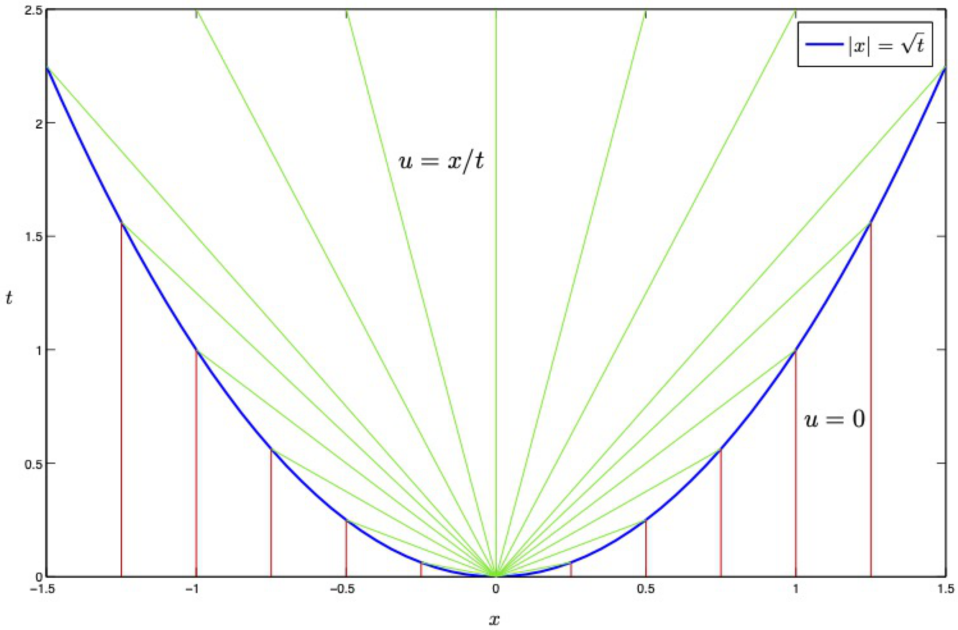
$$a_0 = f'(0) = 0, \qquad d = f''(0) = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{y} u_0(x)\,dx = \begin{cases} -y - 1/2, & -1/2 \leq y \leq 0 \\ y - 1/2, & 0 \leq y \leq 1/2 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad p = -2 \min_{y \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{y} u_0(x)\,dx = 1 > 0$$

$$q = 1 > 0$$

$$\Rightarrow \quad N(x,t) = \begin{cases} \frac{x}{t}, & |x| < \sqrt{t} \\ 0, & |x| > \sqrt{t} \end{cases}$$




$$\text{Si } p = q = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x,t) \equiv 0.$$

<u>Teorema</u> (Di Perna, ~1976: comportamiento en la norma $L^1$).

Si $p, q > 0$ entonces existe $C > 0$ tal que

$$\|u(\cdot,t) - N(\cdot,t)\|_{L^1} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}$$

$\forall\, t \gg 1$, donde $u$ es la solución de Lax-Hopf y $N(x,t)$ es la onda $N$ asociada con las hipótesis ($u_0 \in L^1$, soporte compacto).

Demostración: Ver Notas.

$\square$