Lección 2.10 : Unicidad de la fórmula de Lax-Hopf (continuación).

Paréntesis : funciones de variación acotada.

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, sea $v : I \to \mathbb{R}$.
La <u>variación total</u> de v en I se define como

$$(1)\ldots \quad T.V.(v;I) := \sup_{\mathcal{Q}} \sum_{j=1}^{N} |v(x_j) - v(x_{j-1})|$$

donde $\mathcal{Q}$ es el conjunto de todas las particiones finitas de puntos en I, tales que $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$, $x_j \in I$.

El conjunto de funciones de variación total acotada en I se denota como $BV(I;\mathbb{R})$, es decir,

$$v \in BV(I;\mathbb{R}) \iff T.V.(v;I) < \infty$$

Se denomina conjunto de funciones con variación acotada.

<u>Propiedades</u> :

(a) $BV(I;\mathbb{R}) \subset L^1(I)$
(b) Si $-\infty < a < b < \infty$ y $v \in BV((a,b);\mathbb{R})$ entonces $\forall\, x \in (a,b)$ los límites

$$v(x^+) := \lim_{y \downarrow x^+} v(y), \quad v(x^-) := \lim_{y \uparrow x^-} v(y)$$

existen. Mas aún, v tiene a lo más un conjunto numerable de puntos de discontinuidad en (a,b).

$I = \mathbb{R}$

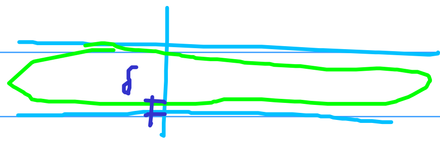
(c) Si $v \in BV(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ y $h > 0$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}} |v(x+h) - v(x)| \, dx \leq h \; T.V.(v; \mathbb{R})$$

Ver: Bressan, Lectures in Functional Analysis, AMS.

Prueba de unicidad (continuación):

$$(2) \begin{cases} v^\epsilon_t + b^\epsilon v^\epsilon_x = \Phi, & x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t < T \\ v^\epsilon(x,T) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$T > 0$, $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,T]; \mathbb{R})$ 

$$\Rightarrow \quad v^\epsilon(x,t) = -\int_t^T \Phi(\hat{x}(s; x,t), s) \, ds$$

donde $\begin{cases} \dfrac{d\hat{x}}{ds} = b^\epsilon(\hat{x}, s), & s \geq t \\ \hat{x}(t) = x, & (x,t) \text{ dados} \end{cases}$

Además, $b_x^\epsilon(x,t) \leq \frac{C}{\tilde{s}}$

con $C>0$ constante, $\forall\ 0<\hat{s}\leq t \leq T$.

Definimos ahora

$$y^\epsilon(s) := \frac{\partial}{\partial x_0}\hat{x}^\epsilon(s; x_0, t_0) \quad ; \qquad s \geqslant t_0$$

donde $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, T]$ es fijo.

Observamos que:

$$\hat{x}^\epsilon(t_0; x_0, t_0) = x_0$$

$$\Rightarrow \quad y^\epsilon(t_0) = 1.$$

De este modo:

$$\frac{\partial y^\epsilon}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \hat{x}^\epsilon}{\partial x_0}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_0}\left[\frac{\partial \hat{x}^\epsilon}{\partial s}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_0} b^\epsilon\left(\hat{x}^\epsilon(s; x_0, t_0), s\right)$$

$$= b_x^\epsilon\left(\hat{x}^\epsilon(s; x_0, t_0), s\right)\frac{\partial \hat{x}^\epsilon}{\partial x_0} = b_x^\epsilon(\cdot\cdot)\, y^\epsilon$$

Integrando y usando $y^\epsilon(t_0)=1$ obtenemos

$$y^\epsilon(s) = \exp\left(\int_{t_0}^{s} b_x^\epsilon\left(\hat{x}^\epsilon(s;x_0,t_0),s\right)ds\right)$$

Tomando $0<\tilde{s}\leq t_0\leq s\leq T$ y usando la cota $b_x^\epsilon \leq \frac{C}{\tilde{s}}$ si $0<\tilde{s}\leq t\leq T$

se obtiene:

$$|y^\epsilon(s)| = y^\epsilon(s) \leq e^{C(-1+T/\tilde{s})} \quad \ldots (3)$$

Derivando v^ϵ con respecto a x:

$$v_x^\epsilon = -\partial_x \int_t^T \Phi\left(\hat{x}^\epsilon(\sigma;x,t),\sigma\right)d\sigma$$

$$= \int_T^t \Phi_x\left(\hat{x}^\epsilon(\sigma;x,t);\sigma\right)\frac{\partial \hat{x}^\epsilon}{\partial x}d\sigma$$

$$= \int_T^t \Phi_x\left(\hat{x}^\epsilon(\sigma;x,t);\sigma\right)y^\epsilon(\sigma)\,d\sigma$$

Usando (3): $\forall\ \delta>0$ existe $C_\delta>0$ independiente de $\epsilon>0$ tal que

$$(4)\ldots\quad |v_x^\epsilon| \leq C_\delta \quad \text{en } \mathbb{R}\times[\delta,T).$$

Finalmente se probará que

$$(5)\ldots\quad \int_{\mathbb{R}} |v_x^\epsilon(x,t)|\,dx \leq M$$

con $M>0$ uniforme y $\forall\ 0\leq t\leq\delta$, con

$0<\delta \ll 1$ suficientemente pequeño.

Escogemos $0<\delta \ll 1$ tal que

$$\Phi \equiv 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times [0,\delta].$$

Por lo tanto, $\forall\, t \in [0,\delta]$, v^ϵ es constante a lo largo de las curvas características $\hat{x}^\epsilon[s;x,t]$, $s \in [t,\delta]$.

Sea una partición finita de la forma

$$x_0 < x_1 < \dots < x_N$$

y formemos puntos

$$y_0 < y_1 < \dots < y_N$$

donde $y_j(s) := \hat{x}_j^\epsilon(s)$, para $t \leq s < \delta$ y donde cada $\hat{x}_j^\epsilon(s)$ és la curva característica con condición inicial x_j es decir, es solución de

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{x}_j^\epsilon}{ds} = b^\epsilon(\hat{x}_j^\epsilon(s), s) & s \geq t \\ \hat{x}_j^\epsilon(t) = x_j \end{cases}$$

Como v^ϵ es constante sobre características entonces

$$\sum_{j=1}^{N} \left| v^\epsilon(x_j,t) - v^\epsilon(x_{j-1},t) \right| =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left| v^\epsilon(y_j(s),t) - v^\epsilon(y_{j-1}(s),t) \right|$$

$$=: \operatorname{var} v^\epsilon(\cdot,\delta).$$

Tomando el supremo sobre todas las posibles particiones finitas obtenemos la variación total. (Esta para una función diferenciable g es simplemente $\int |g'|\, dx$.)

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}} |v_x^\epsilon(x,t)|\, dx = T.V.\ v^\epsilon(\cdot,t)$$

v^ϵ diferenciable

$$\leq T.V.\ v^\epsilon(\cdot,\delta)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |v_x^\epsilon(x,\delta)|\, dx$$

v^ϵ suave y de soporte compacto

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |v_x^\epsilon(x,t)|\, dx \leq M < \infty$$

Así, podemos sustituir $\phi = v^\epsilon$ en la fórmula

$$0 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} w\phi_t + b^\epsilon w \phi_x \, dx\, dt + $$
$$+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (b-b^\epsilon) w \phi_x \, dx\, dt.$$

Así,

$$0 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} w\Phi \, dx dt + \overbrace{\int_0^\delta \int_{\mathbb{R}} (b-b^\epsilon) w v_x^\epsilon \, dx dt}^{I_1(\delta)}$$
$$+ \underbrace{\int_\delta^T \int_{\mathbb{R}} (b-b^\epsilon) w v_x^\epsilon \, dx\, dt}_{I_2(\delta)}$$
$$=: \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} w\Phi \, dx dt + I_1(\delta) + I_2(\delta)$$

En vista de que $u_1^\epsilon \to u_1$ c.d.r. $u_2^\epsilon \to u_2$ c.d.s. si $\epsilon \to 0$, por convergencia dominada de Lebesgue

$$I_2(\delta) \to 0 \quad \text{si} \quad \epsilon \to 0^+$$

tras usar $|v_x^\epsilon| \leq C_s$ en $[s,T] \times \mathbb{R}$ y $\forall\, \delta > 0$.

Si $0 < \delta < T$, usamos $\int_{\mathbb{R}} |v_x^\epsilon(x,t)| \leq M$ $\forall\, 0 \leq t \leq \delta$ para obtener

$$|I_1(\delta)| \leq \left| \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}} (b-b^\epsilon) w v_x^\epsilon \, dx\, dt \right|$$
$$\leq \delta C \max_{0 \leq t \leq \delta} \int_{\mathbb{R}} |v_x^\epsilon(x,t)| \, dx$$
$$\leq \delta C M.$$

Tomando el límite cuando $\delta \to 0^+$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} w\, \Phi \, dx\, dt = 0.$$

$\forall\ \Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,T])$ con $T>0$ arbitrario

$\Rightarrow$ $w \equiv 0$ c.d.s. en $\mathbb{R} \times [0,T]$ $\forall\ T>0$

$\Rightarrow$ $w = u_1 - u_2 \equiv 0$ c.d.s. en $\mathbb{R} \times [0,\infty)$

$\square$

$\therefore$ unicidad.

Comportamiento asintótico:

Caso convexo, $f'' \geq \delta > 0$, solución explícita. $u_0 \in L^\infty$.

- Si además $\int u_0\, dx < \infty$ entonces

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}$$

$\forall\ t>0$.

- Además $\|u(\cdot,t) - N(\cdot,t)\|_{L^1} \to 0$ donde $N(x,t)$ es una "onda N".