Lección 2.1 : Ley de conservación escalar: rompimiento a tiempo finito.

Sección 2. Ley escalar de conservación en una dimensión espacial

Ley escalar de conservación:

$$u_t + f(u)_x = 0 \qquad \cdots (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u = u(x,t) \in \Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$, abierto y acotado, $f \in C^2(\Omega)$.

Problema de Cauchy:

$$(2) \cdots \qquad u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

donde u_0 es conocida, $u_0 \in X$, X de Banach.

Notación: $\quad a(u) := f'(u) \in C^1(\Omega) \qquad \cdots (3)$

velocidad característica

Si $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ es solución de (1) entonces u es constante sobre las curvas características:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = a(u(\hat{x},t))$$

Sobre la característica:

$$\frac{d}{dt} u(\hat{x}(t),t) = u_x(\hat{x}(t),t)\frac{d\hat{x}}{dt} + u_t(\hat{x}(t),t)$$

$$= \underbrace{a(u(\hat{x}(t),t))u_x(\hat{x},t)}_{} +$$

$$+ u_t(\hat{x}(t),t)$$

$$= \left(u_t + f(u)_x\right)\Big|_{(\hat{x}(t),t)} \underset{(1)}{=} 0$$

Si la característica intersecta el eje $\{t=0\}$ en $(y_0, 0)$ entonces

$$u(\hat{x}(t),t) = u(y_0,0) = u_0(y_0)$$

$$\Rightarrow \quad a(u(\hat{x}(t),t)) = a(u_0(y_0))$$

$$\Rightarrow \quad \hat{x}(t) = y_0 + a(u_0(y_0))\,t$$ características.

Teorema 1 (∃ local de soluciones clásicas)

Suponiendo $f \in C^2(\Omega)$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, u_0 acotada con derivada acotada: $|u_0|, |u_0'| \leq C$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Definimos:

$$(4) \cdots \quad T_* := \begin{cases} \infty, & \text{si } a(u_0(x)) \text{ es creciente,} \\ -\left[\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} \frac{d}{dx}\left(a(u_0(x))\right)\right]^{-1}, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces, el problema de Cauchy (1) y (2), tiene una única solución $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, T_*))$.

Demostración

Sea $\alpha(x) := a(u_0(x))$, $x \in \mathbb{R}$.

Suponiendo que $u \in C^1$ es solución de (1) para $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, definimos la característica que pasa por ese punto

$$\Gamma = \left\{ (\hat{x}(t), t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) : \hat{x}(t) = \bar{x} + a(u(\bar{x}, \bar{t}))(t - \bar{t}) \right\}$$

Sea $(y_0, 0) \in \Gamma$; por lo tanto,

$$u|_\Gamma = u(\hat{x}(t), t) = u(y_0, 0) \underset{(2)}{=} u_0(y_0)$$

Para $(\bar{x}, \bar{t})$ dado, hallar $u = u(\bar{x}, \bar{t})$ con u solución C^1 de (1) y (2) consiste en hallar una solución y_0 de

$$y_0 + \underbrace{a(u_0(y_0))}_{\alpha(y_0)} \bar{t} = \bar{x} \quad \cdots \quad [5]$$

Para $\bar{t} > 0$ fijo definimos

$$F_{\bar{t}}(y) := y + \alpha(y) \bar{t}$$

$u_0 \in C^1$, $f \in C^2$ ($\Rightarrow a \in C^1$) $\Rightarrow F_{\bar{t}} \in C^1$ como función de y.

u_0 acotada $\Rightarrow$ $F_{\bar{t}}(\pm\infty) =$

$$= \lim_{y\to\pm\infty} \left(y + a(\underbrace{u_0(y)}) \right) = \pm\infty$$

Por el teorema del valor intermedio existe al menos un valor $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$F_{\bar{t}}(y_0) = 0.$$

Notamos que
$$\frac{dF_{\bar{t}}}{dy} = 1 + \underbrace{\alpha'(y)}_{\geq 0}\underbrace{\bar{t}}$$

$$\alpha'(y) = a'(u_0(y))\,u_0'(y)$$

$$f \in C^2,\ u_0 \in C^1 \Rightarrow \alpha \in C^1.$$

casos: (a) α es no decreciente.

$$\alpha'(y) \geq 0 \Rightarrow \frac{dF_{\bar{t}}}{dy} > 0, \quad \forall\, \bar{t} \geq 0.$$

$\therefore$ $F_{\bar{t}}$ es estrictamente monótona y y_0 es único:

$$y_0 := y_0(\bar{x}, \bar{t})$$

Y en este caso definimos $T_* := \infty$.

La solución clásica buscada es:

$$u(\bar{x},\bar{t}) = u_0(y_0(\bar{x},\bar{t})) \qquad \cdots (6)$$

(b) $\exists$ valores $\tilde{y}$ para los cuales $\alpha'(\tilde{y})<0$.

Así, $\quad 0 < T_* := -\left(\inf_{x\in\mathbb{R}} \alpha'(x)\right)^{-1} < \infty$.

Además,

$$\frac{dF_{\bar{t}}}{dy} = 1+\alpha'(y)\bar{t}$$
$$\geq 1-\frac{\bar{t}}{T_*} > 0$$

si $\bar{t}\in[0,T_*)$. El valor de $y_0=y_0(\bar{x},\bar{t})$ tal que $F_{\bar{t}}(y_0)=0$ es único.

La solución es la misma: (6).

Para verificar que es solución clásica: sea

$$G(\bar{x},\bar{t},y) := F_{\bar{t}}(y)-\bar{x}$$

Entonces: • $G(\bar{x},\bar{t},y_0(\bar{x},\bar{t})) = 0$

• $\dfrac{dG}{dy} = 1+\alpha'(y)\bar{t} \geq 1 > 0$

$$\forall\ \bar{t}\in[0,T_*)$$

Por el teorema de la función implícita existe $y=y(x,t)$ de clase $\mathcal{C}^1$, en una vecindad de $(\bar{x},\bar{t})$ tal que

$$G(\bar{x},\bar{t},y(\bar{x},\bar{t}))=0$$

y
$$y_x=-\frac{G_x}{G_y}=\frac{1}{1+\alpha'(y)t}$$

$$y_t=-\frac{G_t}{G_y}=-\frac{\alpha(y)}{1+\alpha'(y)t}$$

Por unicidad $\quad y(\bar{x},\bar{t})=y_0(\bar{x},\bar{t})$
y además es de clase C^1.

$$y=y(x,t)\quad\forall\quad(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,T_*)$$

Notamos que $\quad F_0(y(\bar{x},0))=y(\bar{x},0)=\bar{x}$

Así, $\quad u(\bar{x},0)=u_0(y(\bar{x},0))=u_0(\bar{x})$.

$\Rightarrow$ la condición inicial se satisface

como $\quad u(\bar{x},\bar{t})=u_0(y(\bar{x},\bar{t}))\in C^1$

y $\quad |u_0'|\leq C \quad$ acotada,

tenemos :

$$u_{\bar{t}}+f(u)_{\bar{x}}=u_0'(y(\bar{x},\bar{t}))y_{\bar{t}}+$$
$$+a(u_0(\bar{x},\bar{t}))u_0'(y(\bar{x},\bar{t}))y_{\bar{x}}$$

$$= \underbrace{u_0'(y(\bar{x},\bar{t}))}^{\text{acotada}} \left(1+\alpha'(y)\bar{t}\right)^{-1} \times \Big[- a(u_0(y(\bar{x},\bar{t}))) + a(u_0(y(\bar{x},\bar{t})))\Big]$$

$$= 0$$

Por construcción tenemos una <u>única</u> solución $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, T_*))$.

$\square$

<u>Proposición</u> La solución clásica <u>no</u> puede extenderse para $t \geq T_*$.

<u>Demostración</u> Podemos suponer que $f \in C^3$.
Sea $T > 0$ tal que $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,T])$.
Si $T_* = \infty$, claramente $T < T_*$.

Si $T_* < \infty$ entonces $\exists$ $\tilde{y} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha'(\tilde{y}) < 0$$

Característica que pasa por $(\tilde{y}, 0)$:

$$\hat{x}(t) = \tilde{y} + t\, a(u_0(\tilde{y}))$$

Para cada $t \leq T$, $u = u(x,t)$ toma un valor constante sobre esta característica.

$$u(\hat{x}(t), t) = u_0(\tilde{y}) \quad \text{constante.}$$

Sea $v := a'(u)u_x$. Derivando v sobre esta característica:

$$\frac{d}{dt} v(\hat{x}(t),t) = a'(u)\left(u_{xx}\frac{d\hat{x}}{dt} + u_{xt}\right) + a''(u)\left(u_x \frac{d\hat{x}}{dt} + u_t\right) u_x$$

$\frac{d\hat{x}}{dt} = a(u)$

$$= a'(u)a(u)u_{xx} + a'(u)u_{xt} + a''(u)a(u)u_x^2 + a''(u)u_x u_t$$

$u \in C^1 \Rightarrow \quad u_t + a(u)u_x = 0$

$$\Rightarrow \quad u_{xt} + a(u)u_{xx} + a'(u)u_x^2 = 0$$

Así,
$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(\hat{x}(t),t)} = -a'(u)^2 u_x^2 = -v^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{v} = t + k$$

$$v(\hat{x}(0),0) = v(\tilde{y},0) =$$
$$= a'(u_0(\tilde{y}))u_x(\tilde{y},0)$$
$$= a'(u_0(\tilde{y}))u_0'(\tilde{y})$$
$$= \alpha'(\tilde{y}) < 0.$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{1}{t + (\alpha'(\tilde{y}))^{-1}}$$

Existe sólo si $t < -(\alpha'(\tilde{y}))^{-1} < T_*$

Necesariamente $T < T_*$

$\square$

Observación:

Ecuaciones lineales $a'(u) = f''(u) = 0.$

$\Rightarrow T_* = \infty.$

$\Rightarrow \exists$ global de soluciones a ecs. lineales.

$T_* < \infty \Rightarrow \alpha'(x) = \underbrace{a'(u_0(x))}\, u_0'(x) < 0$