Lección 1.9: Condiciones de entropía (caso escalar). Par de entropía.

Pérdida de unicidad:

Ecuación de Burgers no viscosa,

$$u_t + \left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x = 0 \qquad \dots \quad (1)$$

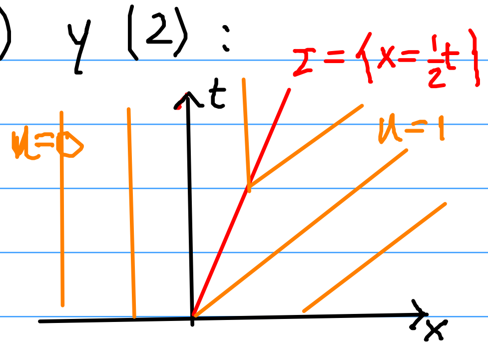
Condición inicial:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases} \qquad \cdots \quad (2)$$

$u_L = 0, \quad u_R = 1$

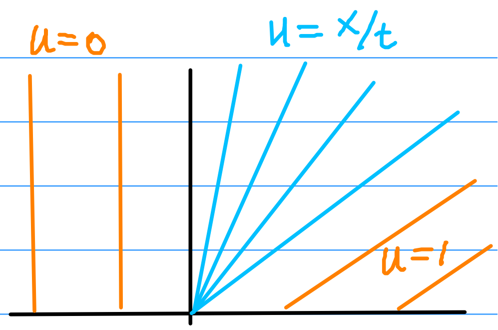
<u>Dos</u> soluciones débiles de (1) y (2):

$$(3)\cdots \quad u(x,t) = \begin{cases} 0, & x<\frac{1}{2}t \\ 1, & x>\frac{1}{2}t \end{cases}$$



[Frente plano]

$$(4)\cdots \quad u(x,t) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x}{t}, & 0\le x\le t \\ 1, & t<x \end{cases}$$



[Onda de rarefacción]

De hecho existe una familia ∞ de soluciones débiles de (1) y (2):

Sea $\alpha \in [0,1]$, se define

(5) ... $$u_\alpha(x,t) = \begin{cases} 0, & x < \frac{\alpha}{2} t \\ \alpha, & \frac{\alpha}{2} t < x < \alpha t \\ \frac{x}{t}, & \alpha t \leq x < t \\ 1, & t \leq x \end{cases}$$

u_α es solución débil de (1) y (2).
Ejercicio: probar esto.

La definición de solución débil es muy general.

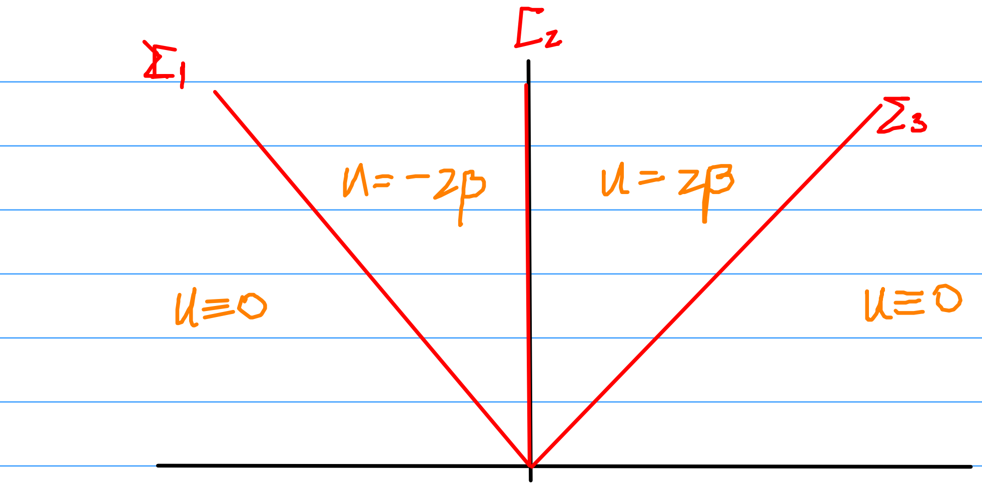
Ejemplo: misma ecuación (1) con condición inicial $u_0(x) \equiv 0$.

$u(x,t) \equiv 0$ es solución débil.

Pero, para cada parámetro $\beta > 0$

$$u_\beta(x,t) = \begin{cases} 0, & x < -\beta t \\ -2\beta, & -\beta t < x < 0 \\ 2\beta, & 0 < x < \beta t \\ 0, & \beta t < x \end{cases}$$

es solución débil de (1) con $u_0 \equiv 0$.



$\Sigma_1 \quad x = -\beta t \qquad u_L = 0, \quad u_R = -2\beta$

$$s = -\beta$$

$$\frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{\frac{1}{2}(2\beta)^2}{-2\beta} = -\beta = s$$

<u>observación</u> La forma conservativa de la ecuación es importante en la descripción de soluciones débiles.

Burgers : $\quad u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0 \qquad \cdots (1)$

Si la solución es clásica entonces (1) es equivalente a

$$\begin{aligned} 0 &= u\,u_t + u\left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x \\ &= \partial_t\left(\tfrac{1}{2}u^2\right) + \partial_x\left(\tfrac{1}{3}u^3\right) \qquad \cdots (6) \end{aligned}$$

Ley de conservación para $\frac{1}{2}u^2$.

Sea un frente plano :

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < st \\ u_R, & x > st \end{cases} \quad \cdots \ (7)$$

con $u_R \neq u_L$.

(7) sol. débil de (1) ssi $s = \frac{1}{2}(u_L + u_R)$
(RH)

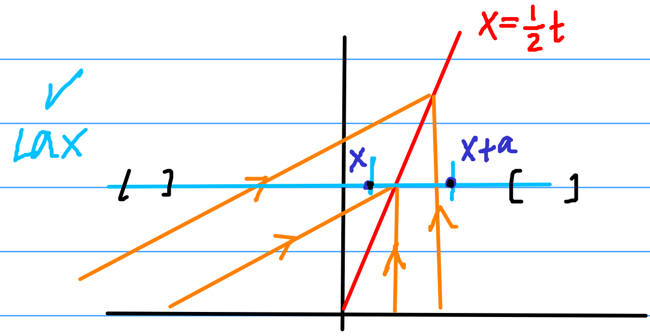
(7) sol. débil de (6) ssi

$$\tilde{s} = \frac{\frac{1}{3}u_R^3 - \frac{1}{3}u_L^3}{\frac{1}{2}u_R^2 - \frac{1}{2}u_L^2} = \frac{2}{3}\,\frac{u_R^2 + u_R u_L + u_L^2}{u_R + u_L}$$

$$\neq \frac{1}{2}(u_R + u_L)$$

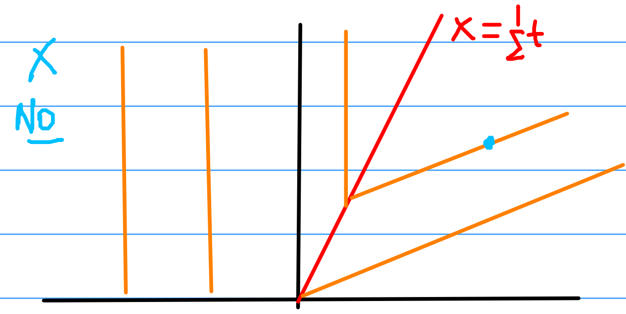
Para soluciones débiles (1) y (6) <u>no</u> son equivalentes.

<u>Condiciones de entropía</u>



$u_R = 0,\ u_L = 1$

(A)



$u_R = 1,\ u_L = 0$

(B)

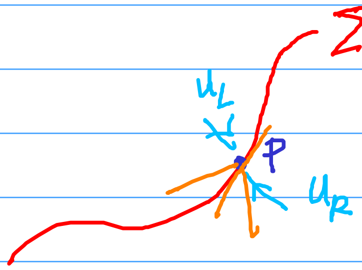
<u>Definición</u> (condición de entropía de Lax : caso escalar)
Una discontinuidad $\Sigma = \{ x = \hat{x}(t) \}$ propagándose con velocidad $s = d\hat{x}/dt$ satisface la condición de entropía de Lax si

$$f'(u_R) \leq s \leq f'(u_L) \quad \dots \quad (1)$$

$\forall P \in \Sigma$

para soluciones débiles de una ley de conservación

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad \dots \quad (2)$$



(A) satisface Lax :

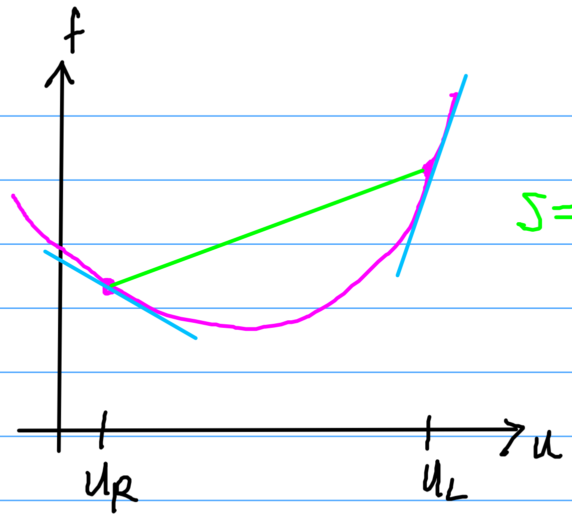
$$0 = u_R = f'(u_R) < s = \frac{1}{2} < f'(u_L) = u_L = 1$$

$f = \frac{1}{2}u^2$

(B) <u>no</u> satisface Lax :

$$0 = u_L = f'(u_L) < s = \frac{1}{2} < f'(u_R) = u_R = 1$$

Nota: En el caso estrictamente convexo $f''(u) \geq \delta > 0$ Lax $\Leftrightarrow$ $u_R < u_L$



$s = \frac{[f]}{[u]}$

Definición Sea $f''(u) \geq \delta > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}$.
u solución débil es solución entrópica de (2) si $\exists\ C > 0$ tal que $\forall\ a > 0$ y todo $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u(x+a,t) - u(x,t)}{a} < \frac{C}{t} \quad \cdots (3)$$

(A) satisface Oleinik:

$$\frac{1}{t} > \frac{u(x+a,t) - u(x,t)}{a} = \begin{cases} 0, & x+a < \frac{1}{2}t, \text{ ó } \frac{1}{2}t \geq x \\ -\frac{1}{a}, & x < \frac{1}{2}t \leq x+a \end{cases}$$

con $C \equiv 1$.

(B) no satisface Oleinik:

$a = \epsilon, \quad 0 < \epsilon \ll 1, \quad (x,t) = (1 - \frac{1}{2}\epsilon, 2)$

Oleinik $\Rightarrow \quad u(x+a,t) - u(x,t)$

$$= u(1 + \tfrac{1}{2}\epsilon, 2) - u(1 - \tfrac{1}{2}\epsilon, 2)$$

$$= 1 \leq \tfrac{1}{2} C \epsilon$$

Tomando $\epsilon \to 0^+$, contradicción.

<u>Función de entropía / par de entropía</u>

(SLC) $$u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0 \quad \cdots (1)$$

$f^j \in C^2$, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$.

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \cdots (2).$$

En muchas aplicaciones, cuando la solución es suave, $u \in C^1$, se cumple además una ecuación suplementaria de la forma

$$E(u)_t + \sum_{j=1}^{d} \Psi^j(u)_{x_j} = 0 \quad \cdots (3)$$

donde $E : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $\Psi^j : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $1 \le j \le d$

función de entropía

flujos de entropía

$$\Psi = (\Psi^1, \Psi^2, \ldots, \Psi^d) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{d\times 1}$$

(E, Ψ) - par de entropía.